kvant.mccme.ru

ISSN 0130-2221

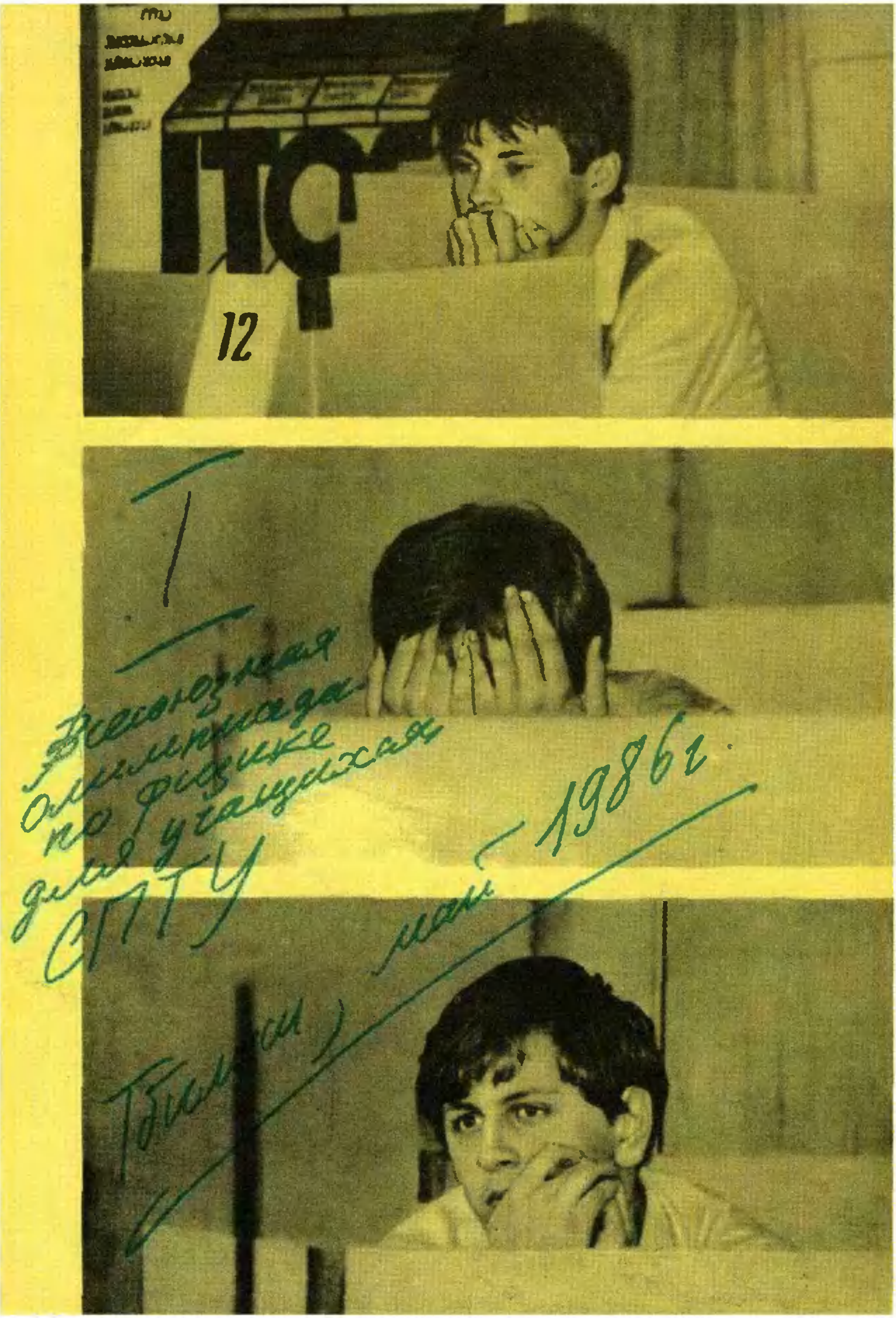
Квант

10
1986

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Как делают алмазы?

kvant.mccme.ru



kvant.mccme.ru

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

КВАНТ 10 1986

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

ОРГКОМИТЕТ МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

В НОМЕРЕ: / IN THIS ISSUE:

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1986

kvant.mccme.ru

КПСС будет продолжать совершенствовать систему народного образования с учетом потребностей ускорения социально-экономического развития, перспектив коммунистического строительства, требований, выдвигаемых прогрессом науки и техники

Программа Коммунистической партии Советского Союза

Реформа высшей школы

XXVII съезд КПСС поставил задачу дальнейшего совершенствования всех систем образования и подготовки кадров в стране. Школьная реформа, начатая еще до XXVII съезда КПСС, последовательно проводится в жизнь. Пересматриваются программы, готовятся новые учебники, улучшаются трудовое обучение и профессиональная подготовка учащихся, укрепляется школьное самоуправление. Многое уже сделано, но впереди еще огромная работа.

Выполняя решения съезда, ЦК КПСС разработал и представил на всенародное обсуждение проект основных направлений перестройки высшего и среднего специального образования в стране. В его обсуждении участвовали миллионы рабочих, специалистов, ученых и преподавателей. Выразив поддержку планам партии, они внесли предложения, направленные на ускорение их реализации.

Многие читатели нашего журнала готовятся к поступлению в вузы, и им весьма полезно внимательно ознакомиться с предстоящей перестройкой высшего образования — ведь не за горами то время, когда и они станут активными участниками этой перестройки.

Научно-техническая революция оказывает огромное преобразующее влияние на все современные профессии, все виды трудовой деятельности человека. Ускорение социально-экономического развития страны требует от каждого не только хорошей профессиональной подготовки. Необходим пытливый, инициативный, творчески активный работник, способный найти и реализовать огромные резервы, скрытые в современном производстве и управлении. Он должен обладать основательной марксистско-ленинской подготовкой, современным экономическим мышлением, навыками управленческой и организаторской работы. Ему придется умело использовать электронно-вычислительную технику, непрерывно совершенствовать свои знания, быстро приспосабливаться к изменяющимся условиям практической деятельности. Основным показателем работы вузов становится качество подготовленных ими кадров.

Растут требования к будущим специалистам, а значит, и к студентам и абитуриентам. На экзаменах и во время собеседования надо убедительно продемонстрировать не только хорошее знание школьной программы, но и обоснованность выбора будущей профессии. А готовиться к этому надо еще в школе. Именно этому призван способствовать наш журнал. Опыт прошлых лет свидетельствует, что тот, кто активно работает с «Квантом», уверенно поступает … физико-математического и инженерного профиля. Решение разнообраз… …адач, придумывание новых задач, наши конкурсы, факультативные …я, работа в школьных кружках, участие в олимпиадах на всех доступ…ым уровнях — таков путь к вузу, к высокому мастерству будущих …листов.

kvant.mccme.ru

И. В. Курчатов: первые шаги в ЛФТИ

Доктор физико-математических наук
А. Н. ЗАЙДЕЛЬ,
доктор физико-математических наук
В. Я. ФРЕНКЕЛЬ

Когда, ознакомившись с биографией выдающегося советского ученого и организатора науки Игоря Васильевича Курчатова (1903—1960), задаешься вопросом: каким емким словом определить его индивидуальность? — самым подходящим представляется: стремительность. Он необычайно быстро входил в новую, незнакомую ему область науки — это характерно и для зрелого, и для совсем юного Курчатова. В 1923 году он окончил Симферопольский университет и в том же году, менее чем за пять месяцев, выполнил исследование радиоактивности снега, овладев и тонкой экспериментальной техникой измерений радиоактивности, и комплексом геофизических сведений, необходимых для проведения и осмысления этой работы, ставшей предметом его первой научной публикации.

Проходит полгода, Курчатов оказывается на метеорологической станции в Феодосии, где изучает физику моря. Четыре месяца потребовалось молодому человеку (ему едва исполнился 21 год), чтобы провести сложное исследование колебаний уровня Азовского и Черного морей. Эти его работы уже в начале 30-х годов, когда имя Курчатова было известно сравнительно узкому кругу коллег, вошли в классические труды по физике моря.

1 октября 1925 года. В архиве Физико-технического института им. А. Ф. Иоффе АН СССР (ФТИ) сохранилась датированная этим числом запись: Игорь Васильевич Курчатов (заметим: успевший к этому времени выполнить и опубликовать пять научных работ) зачисляется в Институт в качестве сотрудника I разряда (это звание примерно соответствовало теперешней должности старшего научного сотрудника). А 16 ноября этого же года Курчатов вместе с К. Д. Синельниковым (1901—1966), с которым они учились в Симферопольском университете, датируют окончание первой физтеховской работы «К вопросу о прохождении электронов через тонкие металлические фольги». Работа сразу же переводится на английский язык, и оба ее варианта — русский и английский — направляются в печать: в «Труды Ленинградской физико-технической лаборатории» и в американский журнал «Physical Review» («Физическое обозрение»). Обе статьи увидели свет в следующем, 1926 году — 60 лет тому назад.

Исследование, предпринятое молодыми учеными из ФТИ, имело как чисто научный, так и прикладной интерес. Выяснение степени проницаемости тонких фольг для электронов могло способствовать усовершенствованию трубок Брауна — так в то время называли осциллографы. Чувствительность люминофоров, которыми покрывался экран трубки Брауна, была недостаточной для успешного фотографирования кривых, вычерчиваемых электронным лучом. Поэтому фотопластинку или фотопленку помещали внутрь откачанной трубки, причем ее перемещение осуществлялось довольно сложно, с помощью специального приспособления (так называемого вакуумного шлюза). Возникла мысль: вывести электронный луч через закрытый тонкой металлической фольгой торец трубки прямо наружу, вне вакуумного объема, и там поместить фотопластинку. Для этого надо было выяснить, насколько проницаемы для медленных (малоэнергичных) электронов металлические фольги. К этому вопросу имела отношение работа американского ученого Г. Гартига, опубликованная в 1925 году на страницах «Physical Review» (вот почему физтеховцы сочли необходимым послать английский вариант своей статьи в этот журнал). Из результатов, полученных Гартигом, следовало, что электроны, ускоренные даже в небольших полях порядка нескольких вольт, простреливают насквозь алюминиевые фольги толщиной до 10 мкм. Это казалось странным.

Курчатов и Синельников решили проверить работу Гартига. Они повторили его эксперимент на аналогичной установке: на пути электронов, вылетающих с катода, помещалась фольга; если электроны «пробивают» фольгу, то они попадают на анод, в цепи появляется ток. Результаты, полученные физтеховцами, казалось бы, подтвердили выводы Гартига. Но затем они решили проверить: не являются ли

kvant.mccme.ru

Игорь Васильевич Курчатов — научный сотрудник 1-го разряда Физико-технического института АН СССР. (Ленинград, 1925 год.)

эти результаты следствием несовершенства фольг — наличием в них невидимых отверстий. (Гартиг убеждался в совершенстве своих фольг, просматривая их на просвет.) С помощью несложной установки ленинградцы обнаружили, что в бездефектных «на глаз» фольгах на самом деле могут быть отверстия. Существование таких отверстий было доказано путем наблюдения в жидкости пузырьков, образующихся при продувании сквозь фольгу воздуха. Этот простой опыт явился решающим доказательством ошибочности результатов Гартига. Схема опыта, поставленного ленинградскими авторами, показана на рисунке. Применяя отобранные с помощью такой установки бездефектные фольги, Курчатов и Синельников убедились, что медленные электроны не пробивали фольгу-мишень; сделав же в бездефектной фольге небольшие отверстия, физтеховцы воспроизводили результаты Гартига.

Очевидно, что американский физик «прозевал» дефектность использованных в его экспериментах фольг. Нам не известны точные условия опыта, в котором он просматривал их на просвет, но некоторые вероятные предположения о них можно сделать и попытаться оценить размеры отверстия, которое Гартиг мог увидеть.

Возможность увидеть свет, проходящий через малое отверстие, определяется величиной той световой энергии, которая, пройдя через отверстие, попадает в зрачок. Сделав естественные предположения о силе света источника, освещающего отверстие, и зная пороговую чувствительность глаза, оценим размеры отверстия, которое еще можно увидеть.

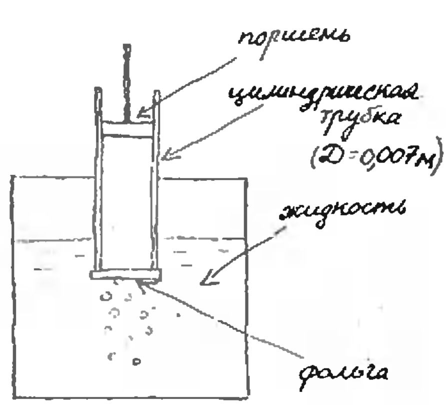
Экспериментально установлено, что в условиях непрерывного освещения величина энергетического потока, соответствующего зрительному порогу хорошо адаптированного (привыкшего к темноте) глаза, составляет примерно $5\cdot10^{-17}$ Дж/с. Электрическая лампочка преобразует в световую энергию, воспринимаемую глазом, примерно 2 % подводимой к ней электроэнергии. Следовательно, лампа мощностью 40 Вт — именно такие были наиболее распространенными в середине 20-х годов — излучает ежесекундно 0,8 Дж световой энергии. Полагая, что эта энергия равномерно излучается во все стороны, подсчитаем ту ее часть, которая проходит через отверстие в экране (диаметр отверстия d), находящемся на расстоянии l от лампочки. Площадь такого отверстия $\pi d^2/4$, а телесный угол, выделяемый им из сферы радиуса l, составляет $\pi d^2/4l^2$. Отсюда для потока световой энергии, проходящего через отверстие, получим величину

$$\Phi_d = \frac{0{,}8}{4\pi}\,\frac{\pi d^2}{4l^2} = 5\cdot10^{-2}\,\frac{d^2}{l^2}\ \text{Вт}.$$

Полагая $l = 0{,}1$ м, имеем:

$$\Phi_d = 5d^2\ \text{Вт},$$

где d выражено в метрах. Можно считать, что отверстие очень малого диаметра в экране (исследуемой на просвет фольге) излучает равномерно в пределах полусферы, то есть телесного угла 2π (это происходит вследствие



kvant.mccme.ru

Семинар А. Ф. Иоффе по физике твердого тела. И. В. Курчатов — крайний справа в дальних рядах. У доски справа — академик А. Ф. Иоффе. (Ленинград, 1928 год.)

дифракции). Тогда на расстоянии наилучшего зрения $r=0{,}25$ м на зрачок диаметром $d_{зр}$ придется поток энергии

$$\Phi_{зр}=\frac{\Phi_\Sigma}{2\pi}\frac{\pi d_{зр}^2}{4r^2}=0{,}625\frac{d_{зр}^2}{r^2}\,d^2\ \text{Вт}.$$

Принимая диаметр зрачка адаптированного глаза равным 0,005 м, для попадающей в него мощности находим:

$$\Phi_{зр}=0{,}625\frac{25\cdot10^{-6}}{0{,}625\cdot10^{-1}}\,d^2=$$
$$=2{,}5\cdot10^{-4}\,d^2\ \text{Вт}.$$

Приравнивая ее к пороговой мощности $5\cdot10^{-17}$ Вт, получим соотношение для определения d: $2{,}5\cdot10^{-4}d^2=5\cdot10^{-17}$, откуда $d\approx0{,}5\cdot10^{-6}$ м $=0{,}5$ мкм.

Итак, предельный размер отверстия, которое можно заметить на просвет,— 0,5 мкм.

Интересно подсчитать давление, которое обеспечило бы «проталкивание» (выдувание) воздуха через такое отверстие в фольге, то есть давало бы картину пузырьков в сосуде, наблюдавшихся Курчатовым и Синельниковым (см. рисунок).

Известно, что поверхность жидкости ведет себя подобно растянутой пленке (обладает поверхностным натяжением). Поэтому, чтобы выдуть, например, мыльный пузырь, в нем надо создать избыточное давление, определяемое формулой Лапласа:

$$\Delta p=\frac{2\sigma'}{R},$$

где $\sigma'=2\sigma$ — удвоенный коэффициент поверхностного натяжения жидкости (у пленки две поверхности), R — радиус пузыря. Если поместить трубочку в жидкость на глубину h, то чтобы выдуть с ее помощью воздушный пузырь, надо создать в нем давление, превышающее атмосферное на величину, равную сумме лапласовского давления Δp и гидростатического давления ρgh. Размер пузырьков — порядка диаметра трубки, и если он мал, то лапласовское давление значительно больше гидростатического, которым в этом случае можно пренебречь. Считая пузырь полусферой, избыточное давление можно тогда найти по формуле

$$\Delta p=\frac{2\sigma}{R}=\frac{4\sigma}{d} \qquad (*)$$

(у воздушного пузырька в жидкости одна поверхность). Такой же формулой можно воспользоваться, чтобы оценить избыточное давление, которое нужно создать у поверхности фольги, погруженной в воду, чтобы продуть сквозь отверстие в ней воздух. Ясно, что это давление будет тем меньше, чем меньше поверхностное натяжение жидкости.

(Окончание см. на с. 50).

kvant.mccme.ru

Иррациональность и неприводимость

В. А. ОЛЕЙНИКОВ

Древние греки знали, что

$\boxed{\text{величина } \sqrt{2} \text{ иррациональна}}$

и умели это доказывать.

Если допустить, что величина $\sqrt{2}$ рациональна, и представить ее в виде несократимой дроби $\sqrt{2}=a/b$, то

$$2=\frac{a^2}{b^2}, \quad 2b^2=a^2.$$

Ясно, что число a делится на 2, a^2 — на 4 и, значит, b — на 2. Так что a/b — дробь сократимая.

Дробь $a/b=\sqrt{2}$ не может одновременно быть сократимой и несократимой, значит, величина $\sqrt{2}$ — не дробь. Это качество делало $\sqrt{2}$ нежеланным гостем в мире чисел, где царили гармония и порядок, простота и совершенство.

Своим появлением $\sqrt{2}$ был обязан диагонали единичного квадрата и неудачным попыткам измерить ее рациональными отрезками. Неудача сильно беспокоила древних греков, вызывая брожение умов. Реальность, выраженная геометрическим образом, настойчиво стучалась в мир чистого и прекрасного.

Прошло много веков, $\sqrt{2}$ завоевал себе место среди чисел, став другой реальностью — корнем уравнения $x^2-2=0$, и оказалось, что

$\boxed{\text{число } \sqrt{2} \text{ иррационально}}$

потому, что

$\boxed{\text{многочлен } x^2-2 \text{ неприводим.}}$

О связи иррациональности и неприводимости — наш рассказ.

Неприводимость

Многочлен

$$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

степени n по x с целыми коэффициентами

$$a_0, a_1, \ldots, a_n; \quad a_n\neq 0$$

называется *неприводимым*, если он не может быть представлен в виде произведения

$$P(x)=L(x)\cdot Q(x)$$

многочленов $L(x)$ и $Q(x)$ также с целыми коэффициентами, но степеней меньших, чем n. Если же подобное возможно, то $P(x)$ называется *приводимым*.

Например, многочлен x^3+x^2+x+1 приводим (он равен $(x+1)(x^2+1)$ — проверьте!), а многочлен x^2+1 неприводим (подумайте, почему).

Линейный двучлен a_0+a_1x дает простейший пример неприводимого многочлена. Его единственный корень $x=-a_0/a_1$ есть число рациональное. Но

среди корней неприводимого многочлена степени $n\geqslant 2$ не может быть рациональных.

kvant.mccme.ru

Это свойство вытекает из более общего факта:

> ТЕОРЕМА. *Если число α является корнем одновременно двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ и один из них, скажем $Q(x)$, неприводим, то многочлен $d \cdot P(x)$ при некотором целом $d \neq 0$ делится на $Q(x)$:*
> $$d \cdot P(x) = L(x) \cdot Q(x).$$

Эта ТЕОРЕМА связана с именем прославленного немецкого математика К. Ф. Гаусса (1777—1855).

Она будет доказана на с. 10, а указанное выше свойство вытекает из нее, поскольку линейный двучлен не может делиться на многочлен степени $n \geqslant 2$.

Открывается возможность получать много новых иррациональных чисел. Их следует искать среди корней неприводимых многочленов. В загадочную страну неприводимых многочленов нас вводит

> **Признак Эйзенштейна.** *Если для многочлена $P(x)$ можно указать такое простое число p, что старший коэффициент a_n не делится на p, а все остальные коэффициенты a_k делятся на p, $k = 0, 1, \ldots, n$, но свободный член a_0, делясь на p, не делится на p^2, то такой многочлен $P(x)$ неприводим.*

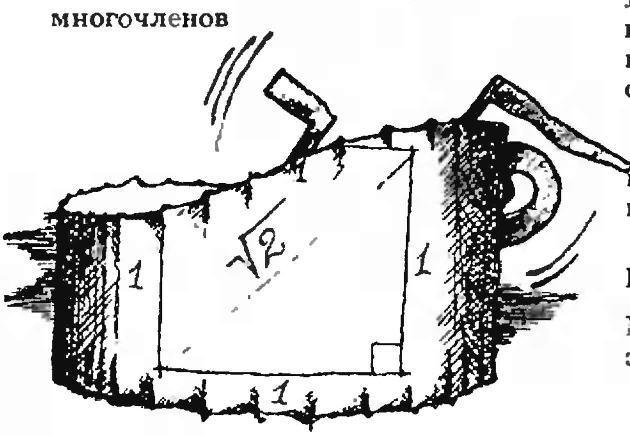
Ф. Г. М. Эйзенштейн (1823—1852) — тоже немецкий математик — испытал немилость судьбы и равнодушие современников. Его идеи были восприняты лишь много лет спустя.

Доказательство

Пусть, в противоречие с утверждением, многочлен $P(x)$ с указанными свойствами коэффициентов приводим и потому разлагается в произведение

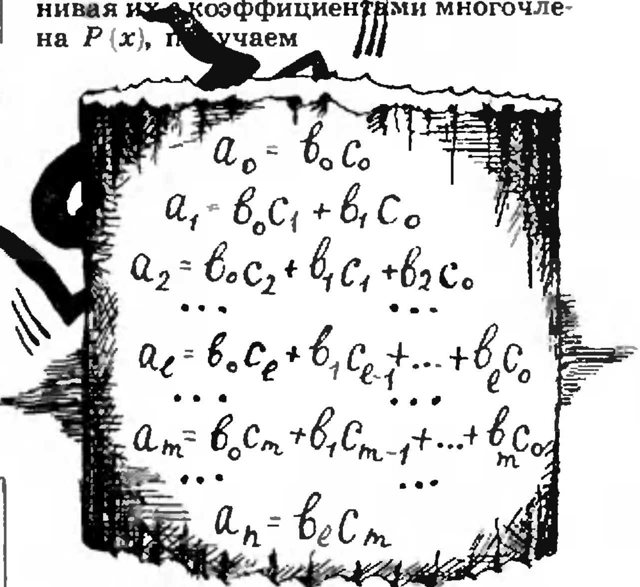
$$P(x) = L(x) \cdot Q(x)$$

многочленов



$$L(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_l x^l,$$
$$Q(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_m x^m$$

также с целыми коэффициентами. Их старшие коэффициенты b_l и c_m отличны от нуля, и будем считать для определенности, что $m \geqslant l \geqslant 1$. Собирая коэффициенты при одинаковых степенях x в произведении $L(x)\,Q(x)$ и сравнивая их с коэффициентами многочлена $P(x)$, получаем



В первом из написанных равенств свободный член a_0 делится на p; значит, или b_0, или c_0 делится на p; они не могут делиться на p одновременно, ибо $a_0 = b_0 c_0$ не делится на p^2.

Пусть b_0 делится на p, а c_0 не делится. Тогда переходим ко второму равенству: a_1 делится на p, $b_0 c_1$ делится на p; значит, $b_1 c_0$ также делится на p и b_1 делится на p...

...И так идем до $l+1$-го равенства (при x^l): a_l делится на p, все $b_0, \ldots, b_{l-1}$ делятся на p; тогда $b_l c_0$ делится на p и, значит, b_l делится на p.

А теперь переносимся в последнее равенство: значит, старший коэффициент $a_n = b_l c_m$ делится на p, что невозможно по условию признака.

Если же в первом равенстве c_0 делится на p, а b_0 не делится, то, начав все сначала, идем до $m+1$-го равенства (при x^m), а затем опять переносимся в последнее.

Значит, разложение $P(x) = L(x) \times Q(x)$ невозможно, и многочлен $P(x)$ неприводим. Признак установлен, а нас уже ждут

Иррациональные радикалы

Многочлен $x^2 - 2$ неприводим по признаку Эйзенштейна (возьмите $p = 2$).

kvant.mccme.ru

Вместе с $\sqrt{2}$ мы получим новые иррациональные числа

$$\sqrt[n]{p},$$

где p — любое простое, а $n=2, 3, \ldots$ Каждое такое число есть корень многочлена

$$P(x)=x^n-p,$$

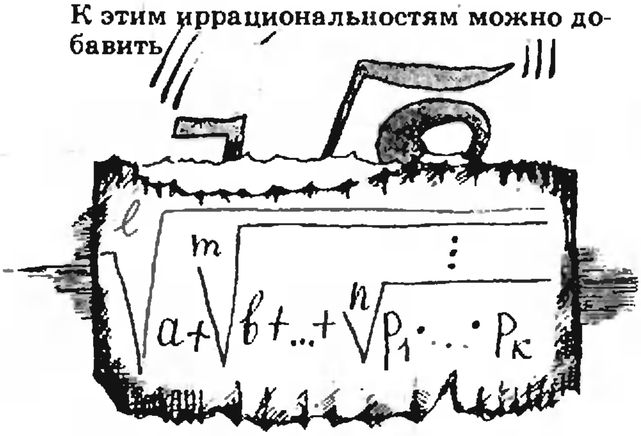
который неприводим по признаку Эйзенштейна. Число

$$\sqrt[n]{p_1 \ldots p_k}$$

иррационально, если $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа. Это число есть корень неприводимого многочлена

$$P(x)=x^n-p_1 \ldots p_k.$$

К этим иррациональностям можно добавить



при любых натуральных a, b, ... (Попробуйте сами построить многочлены для этих монстров и доказать их неприводимость.)

Рассмотренные примеры иллюстрируют действие признака Эйзенштейна. Однако в них мы еще недалеко ушли от древних греков. Иррациональность последнего выражения легко может быть доказана последовательным возведением в степени l, m, ..., n и таким же рассуждением, как при доказательстве иррациональности числа $\sqrt{2}$. Более внушительно выглядит сумма радикалов

$$\frac{a_1}{b_1}\sqrt[n_1]{p^{m_1}}+\ldots+\frac{a_k}{b_k}\sqrt[n_k]{p^{m_k}}.$$

Если все дроби $m_1/n_1, \ldots, m_k/n_k$

$$\frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_k}{n_k}$$

правильные и различные, то указанная сумма представляет собой иррациональное число. Действительно, предположим противное: пусть эта сумма равна a/b. Обозначим $N=n_1 \ldots n_k$. Тогда число $\sqrt[N]{p}$ есть корень многочлена с целыми коэффициентами

$$\frac{a_1 B}{b_1}x^{\frac{m_1 N}{n_1}}+\ldots+\frac{a_k B}{b_k}x^{\frac{m_k N}{n_k}}-\frac{aB}{b},$$

где $B=b\cdot b_1 \ldots b_k$. Степень этого многочлена меньше N. По ТЕОРЕМЕ он должен делиться на неприводимый многочлен x^N-p степени N, что невозможно.

Это занятие можно с успехом продолжить и дальше (например, комбинируя последний пример с предпоследним). Успех окрыляет и рождает иллюзии. Может показаться, что, нагромождая радикалы друг на друга и применяя четыре арифметических действия к целым числам a, b, ..., мы всегда без особых хлопот будем получать новые иррациональные числа... От иллюзий в математике хорошо помогают «частные случаи». Одним из них является задача об иррациональности радикала $\sqrt[n]{a^n+b^n}$ при любых натуральных a, b и $n \geqslant 3$, равносильная «великой теореме Ферма»:

Уравнение $a^n+b^n=c^n$ неразрешимо в натуральных a, b, c при $n \geqslant 3$.

Эту задачу оставил в наследство потомкам П. Ферма — французский математик XVII века. С тех пор, вот уже триста с лишним лет, ее безуспешно пытаются решить лучшие (и худшие) математики всего мира. Привлекая своей «доступностью», она стала предметом внимания и многих любителей математики, поглотив, подобно болотной трясине, не одну наивную необученную душу.

В 1908 году немецкий богач П. Вольфскель предложил крупную денежную премию за доказательство «великой теоремы». С тех пор, все время нарастая, идет лавина ошибочных «решений». И даже девальвация марки в 30-х годах, сильно обесценившая эту премию, не остановила это «творчество».

Вывод очевиден — массовое производство иррациональных радикалов представляется перспективным, но в то же время дьявольски опасным делом.

Вариации

Признак Эйзенштейна далеко не всегда решает вопрос о неприводимости многочлена $P(x)$, ибо он требует, чтобы все коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, кроме старшего a_n, имели общий простой делитель p. Существует много многочленов, как, например,

$$x^2+1,\ x^4+1,\ x^6+x^3+1,$$

не имеющих такого делителя. Тем не

kvant.mccme.ru

менее и здесь признак Эйзенштейна нельзя считать исчерпанным — следует только «расшевелить» $P(x)$, меняя переменную x.

Вопрос о неприводимости многочлена

$$P(x)=x^2+1$$

сводится к признаку Эйзенштейна следующим образом. Если бы $P(x)$ был приводим, то и $P(x+1)$ был бы приводим. Но $P(x+1)=x^2+2x+2$ неприводим по признаку Эйзенштейна при $p=2$. Многочлены x^4+1, x^6+x^3+1 неприводимы по той же причине. Аналогичное преобразование решает вопрос о неприводимости многочлена

$$P(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1,$$

называемого многочленом «деления круга».

Многочлен $P(x)$ приводим, если $n=p\cdot k$ — составное число, так как

$$P(x)=\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{(x^p)^k-1}{x-1}=$$

$$=\frac{(x^p-1)(x^{p(k-1)}+x^{p(k-2)}+\dots+1)}{x-1}=$$

$$=(x^{p-1}+x^{p-2}+\dots+1)\times$$

$$\times(x^{p(k-1)}+x^{p(k-2)}+\dots+1),$$

и неприводим, если $n=p$ — простое число.

Действительно, если бы $P(x)$ был приводим в этом случае, то и $P(x+1)$ был бы приводим. Но

$$P(x+1)=\frac{(x+1)^p-1}{(x+1)-1}=$$

$$=x^{p-1}+C_p^1x^{p-2}+\dots+C_p^{p-1}$$

Все коэффициенты[*]), кроме старшего, делятся на p, ибо

$$C_p^k=\frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}\quad(k<p),$$

числитель делится на p, а знаменатель не делится. Кроме того, свободный член равен $C_p^{p-1}=p$ и не делится на p^2. Тогда, согласно признаку Эйзенштейна, $P(x+1)$ неприводим, а значит, неприводим и $P(x)$.

Из доказанной неприводимости $P(x)$ следует, что среди корней уравнения деления круга

$$x^{p-1}+x^{p-2}+\dots+1=0$$

при любом простом $p\geqslant3$ не может быть рациональных.

Можно доказать, что уравнение деления круга не имеет и действительных корней — все они комплексные числа, — и задать более трудный вопрос: когда эти корни «не слишком иррациональны», то есть когда они представимы **квадратичными** радикалами (это значит, что их можно получить, применяя к целым числам четыре арифметических действия и операцию извлечения **квадратных** корней)? Этот вопрос, в сущности, интересовал еще древнегреческих математиков, так как он равносилен такой задаче на построение: при каких p *можно построить правильный p-угольник циркулем и линейкой?*

В юности Гаусс справился с этой задачей и доказал[*]), что корни уравнения деления круга выражаются квадратными радикалами тогда (и только тогда[**])), когда p есть *простое число Ферма*, $p=3,\ 5,\ 17,\ 257,\ \dots,\ 2^{2^k}+1,\dots$ Гаусс очень гордился своим открытием и даже «выразил желание, чтобы в памятнике на его могиле был увековечен семнадцатиугольник».

К другим, более скромным достижениям Гаусса относится

Лемма о примитивных многочленах

Эта лемма поможет нам дать обещанное доказательство теоремы. Многочлен

$$P(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$$

называется *примитивным*, если его коэффициенты $a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_n$ не имеют общих простых делителей.

Лемма Гаусса утверждает, что

> *Произведение двух примитивных многочленов есть снова примитивный многочлен.*

Эта лемма используется во многих теоремах теории чисел и алгебры. Читатель, прошедший доказательство признака Эйзенштейна (на с. 7), легко освоит и **доказательство**, приведенное ниже, ибо они имеют между собой много общего.

*) Мы пользуемся биномиальными коэффициентами C_p^k и формулой бинома Ньютона — см. «Квант», 1986, № 1, с. 23.

*) Подробности этого события отражены С. Г. Гиндикиным в «Рассказах о физиках и математиках» (М.: Наука, 1981.— Серия Библ. «Квант», вып. 14).

**) Эта часть утверждения доказана П. Л. Ванцелем (1814—1848) — репетитором Политехнической школы в Париже.

Допустим противное, что произведение примитивных многочленов

$$L(x)=b_0+b_1(x)+\ldots+b_lx^l,$$
$$Q(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_mx^m$$

есть многочлен

$$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n,$$

не являющийся примитивным. Пусть тогда p — один из простых делителей его коэффициентов. Пусть b_i — самый младший коэффициент $L(x)$, не делящийся на p, $0\leqslant i\leqslant l$, а c_j — самый младший коэффициент $Q(x)$, не делящийся на p, $0\leqslant j\leqslant m$. Такие коэффициенты обязательно найдутся, иначе $L(x)$ и $Q(x)$ не были бы примитивными. Коэффициент при x^{i+j} в произведении

$$L(x)\,Q(x)$$

имеет вид

$$\ldots+b_{i-1}c_{j+1}+\quad+b_{i+1}c_{j-1}+\ldots$$

и не делится на p, так как все слагаемые этой суммы, кроме одного b_ic_j, делятся на p. С другой стороны, эта сумма равна a_{i+j} — коэффициенту многочлена $P(x)$ и должна делиться на p. Полученное противоречие доказывает лемму.

И наконец,

Доказательство ТЕОРЕМЫ,

которая утверждает, что любой многочлен $P(x)$, имеющий общий корень α с неприводимым многочленом $Q(x)$, делится на него после умножения на некоторое целое $d\neq 0$.

Разделим многочлен $P(x)$ на $Q(x)$ «с остатком»:

$$\begin{array}{r|l} -\,a_nx^n+\ldots+a_0 & c_mx^m+\ldots+c_0 \\ \cline{2-2} \underline{a_nx^n+\ldots\quad} & \frac{a_n}{c_m}x^{n-m}+\ldots \\ \ldots\ldots & \\ \ldots\ldots & \\ \ldots & \\ \ldots & \\ \hline r_{m-1}x^{m-1}+\ldots & \end{array}$$

В результате получим, что

$$P(x)=L_1(x)\cdot Q(x)+R_1(x).$$

Частное $L_1(x)=\frac{a_n}{c_m}x^{n-m}+\ldots$

и остаток $R_1(x)=r_{m-1}x^{m-1}+\ldots$ будут многочленами от x с коэффициентами — рациональными числами.

Если $P(x)$ разделится на $Q(x)$ без остатка: $R_1\equiv 0$, то все уже доказано, ибо тогда

$$P(x)=L_1(x)\cdot Q(x)=\frac{1}{d}\,L(x)\cdot Q(x),$$

где d — общий знаменатель коэффициентов многочлена $L_1(x)$.

Если же $R_1(x)\not\equiv 0$, то его степень по x будет строго меньше степени делителя $Q(x)$, а число α, будучи одновременно корнем $P(x)$ и $Q(x)$, является также корнем многочлена $R_1(x)$:

$$R_1(\alpha)=P(\alpha)-L_1(\alpha)\cdot Q(\alpha)=0.$$

Разделив $Q(x)$ на $R_1(x)$, получим в остатке новый многочлен $R_2(x)$ с аналогичным свойством. Его степень будет строго меньше степени $R_1(x)$, а значит, и степени $Q(x)$.

Последовательно деля $Q(x)$ на получающиеся остатки $R_1(x)$, $R_2(x)$, ..., $R_k(x)$, придем либо к противоречию:

$$R_k(x)\equiv c\neq 0,$$

и α не может быть корнем $R_k(x)$, либо к тому, что $Q(x)$ разделится на $R_k(x)$ без остатка: $Q(x)=L_k(x)\cdot R_k(x)$. Приводя рациональные коэффициенты многочленов $L_k(x)$, $R_k(x)$ к общему знаменателю и вынося за скобки общие делители числителей, перепишем это равенство в виде

$$Q(x)=\frac{a}{b}\,[L(x)\,R(x)],$$

где a/b — несократимая дробь, а $L(x)$, $R(x)$ — примитивные многочлены.

Остается показать, что числовой коэффициент a/b в последнем разложении есть целое число, то есть что $b=\pm 1$. Допустим противное, и пусть p — простой делитель числа b. Тогда из равенства

$$bQ(x)=a[L(x)\,R(x)]$$

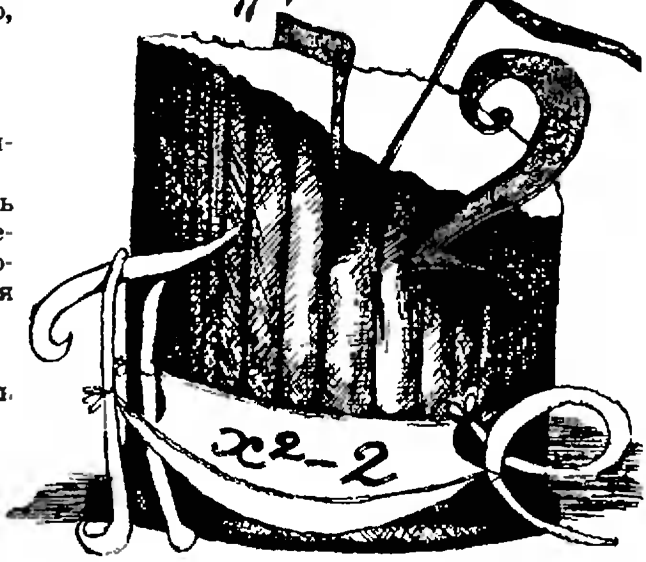
видим, что все коэффициенты правой части делятся на p; a не может делиться на p — в противном случае дробь a/b сократима. Значит, на p делятся все коэффициенты многочлена $L(x)\,R(x)$, что невозможно по лемме Гаусса.

Значит, многочлен

$$Q(x)=[\pm aL(x)]\cdot R(x)$$

приводим, что противоречит условию ТЕОРЕМЫ и тем самым полностью ее доказывает.

Давно канули в небытие древние греки. Миновала средневековая неразбериха. Уходил и XIX век, классический век математики. За ним надвигался наш век — век XX-й..



kvant.mccme.ru

Библиотечка «Квант»

В этом году в Библиотечке «Квант» — серии научно-популярных книг для школьников — выходит из печати пятидесятый выпуск — сборник «Занимательно о физике и математике» под редакцией профессора Л. Г. Асламазова. В этот сборник вошли лучшие статьи и задачи, опубликованные в разные годы в журнале «Квант» под рубрикой «Квант» для младших школьников».

Библиотечка «Квант» издается Главной редакцией физико-математической литературы издательства «Наука» с 1980 года. Книги серии рассказывают о том, как много интересного таят в себе физика и математика, знакомят читателя с проблемами современной науки, способствуют развитию творческого мышления и привлечению школьников к серьезным самостоятельным занятиям. Среди авторов книг — известные ученые, активно работающие в самых разных областях физики, математики и смежных наук.

Отметим, что книги Библиотечки пользуются большой популярностью не только у школьников — их с интересом читают студенты, преподаватели, все, кто интересуется физикой и математикой. Надеемся, что познакомившись с Библиотечкой «Квант» в школе, вы будете возвращаться к ней и в вашей дальнейшей учебе. Кстати, некоторые выпуски используются в вузах в качестве пособий при изучении специальных разделов физики и математики. В качестве примера назовем книги А. Л. Эфроса «Физика и геометрия беспорядка», М. Н. Аршинова и Л. Е. Садовского «Коды и математика», М. Е. Левинштейна и Г. С. Симина «Знакомство с полупроводниками».

В 1987 году издательство «Наука» планирует выпустить в Библиотечке «Квант» девять книг.

Почему петляют реки и как они размывают берега? Отчего звучит скрипичная струна? Как сверхпроводимость помогает расшифровать магнитное поле мозга и сердца? Как распространяется звук в океане? Об этом и еще о многих других интересных физических явлениях вы сможете узнать, прочитав книгу Л. Г. Асламазова и А. А. Варламова «Удивительная физика».

Книга М. Б. Балка и В. Г. Болтянского «Геометрия масс» на примерах трех сотен задач рассказывает об оригинальном способе доказательства геометрических теорем. Он основан на аналогии между некоторыми геометрическими объектами и понятиями физической механики.

В сборник «Задачи Московских физических олимпиад» (под редакцией кандидата физико-математических наук С. С. Кротова) войдут наиболее интересные и оригинальные задачи (и их решения) Московских городских олимпиад за последние пятнадцать лет. Сборник будет интересен всем, кто любит задачи «с изюминкой», окажется полезным при подготовке к конкурсным экзаменам в вузы.

Книга М. Е. Левинштейна и Г. С. Симина «Барьеры (от кристалла до интегральной схемы)» популярно расскажет о полупроводниковых приборах, их устройстве и технологии изготовления, о современной полупроводниковой электронике. Этот выпуск будет продолжением книги тех же авторов «Знакомство с полупроводниками» (выпуск 33).

Проблемам современной волновой оптики посвящена книга Г. Р. Локшина, С. М. Козела и В. Е. Белонучкина «Экскурсия в волновую оптику». В книге пойдет речь о когерентности и об уникальных свойствах лазерного излучения, о дифракции, о пределах, которые ставит волновая природа света, о возможностях волновой оптики.

Понятие времени — одно из самых фундаментальных в физике. В простой и наглядной форме расскажет о развитии наших представлений о времени книга А. Д. Чернина «Физика времени». В ней излагаются важнейшие вопросы, связанные с природой времени как физического понятия, с прошлым и будущим Вселенной.

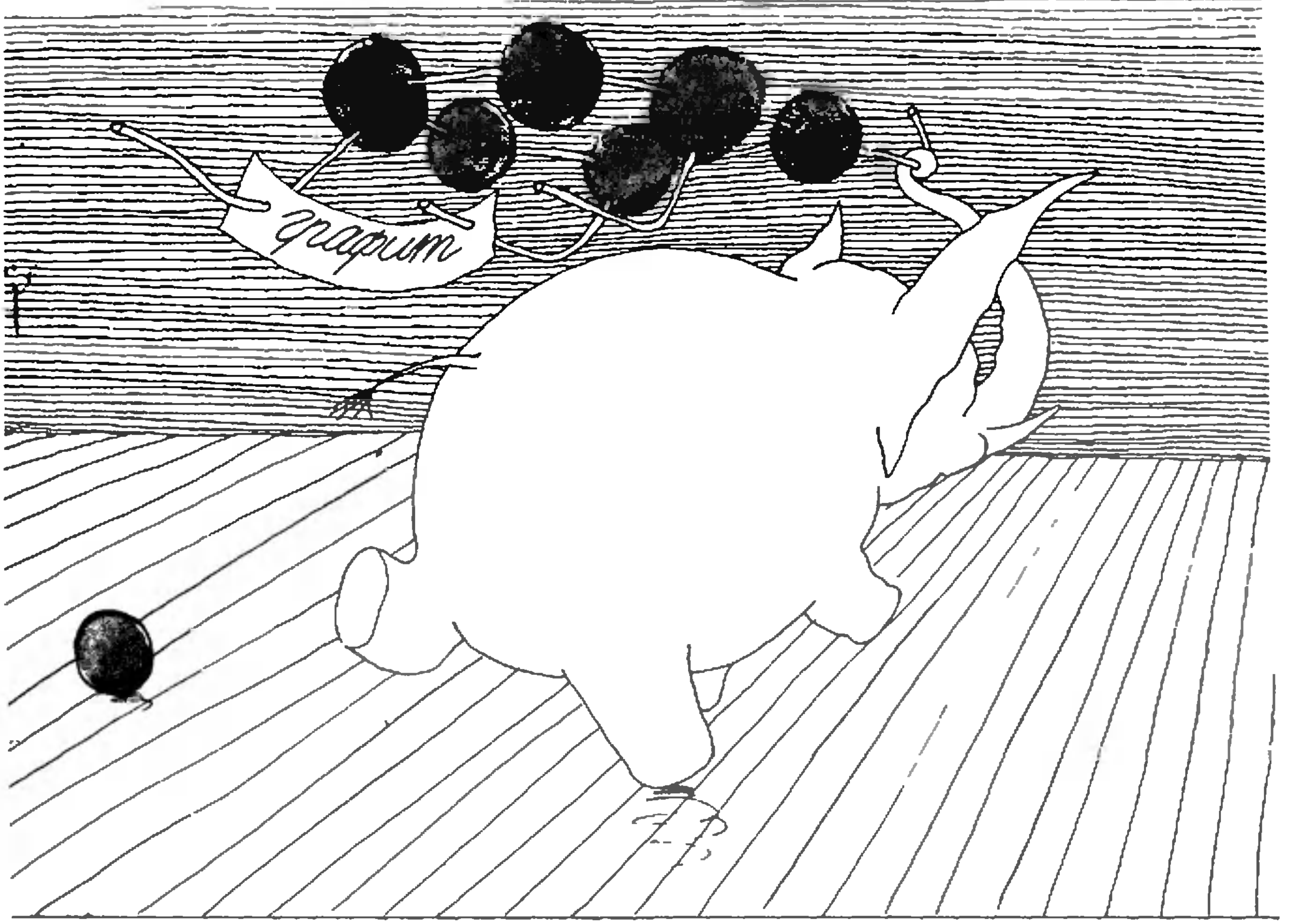
Многие книги Библиотечки уже стали библиографической редкостью, а сегодняшним старшеклассникам они наверняка были бы интересны и полезны. Именно поэтому в 1987 году планируется переиздать книги М. Д. Франк-Каменецкого «Самая главная молекула» и Я. А. Смородинского «Температура».

Вторым изданием в Библиотечке выйдет книга известного американского физика-теоретика Р. Фейнмана «Характер физических законов», в которой автор рассказывает о фундаментальных законах природы, о том, как их открывают, каковы их особенности. (А в самом начале 1988 года в Библиотечке планируется выпуск новой книги Р. Фейнмана «КЭД (квантовая электродинамика) — странная теория света и вещества».)

Тем, кто хочет пополнить свою библиотеку новыми выпусками Библиотечки «Квант», советуем заранее оформить заказы на них в книжных магазинах.

А. Б.

kvant.mccme.ru



Как делают алмазы

Кандидат физико-математических наук
Ф. Ф. ВОРОНОВ

Алмазы.— Кончится тем, что их будут изготовлять!
— И подумать только, что это не что иное, как уголь!

Г. Флобер. Лексикон прописных истин

Алмаз с незапамятных времен привлекал внимание людей красотой своих прозрачных кристаллов, ярким блеском и своей исключительной твердостью. Крупные алмазы украшали священные статуи, скипетры царей, оружие вельмож. Им давали имена, их покупали за баснословные деньги, похищали, пускали в ход для разрешения государственных конфликтов.

С давних лет человек стремился получить алмаз в лаборатории. Алхимики растирали, прокаливали на «двойном жару» смеси из серы, ртути и других веществ — но безрезультатно.

Лишь после того как в 16—17 веках на смену алхимии пришла практическая химия с ее количественными методами исследований, ученые поняли природу алмаза.

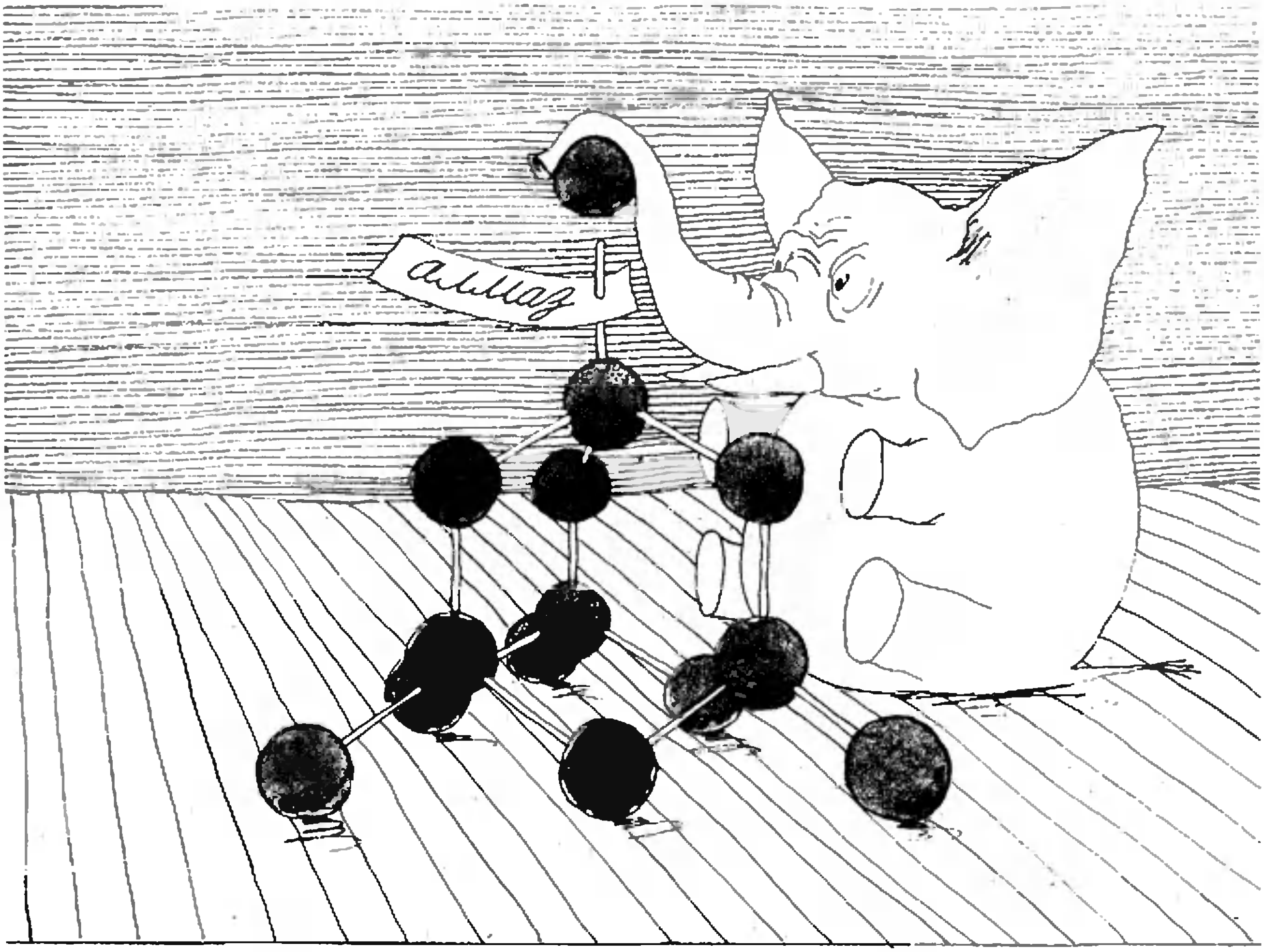
В 1797 году англичанин С. Теннант установил, что алмаз, сгорая в кислороде, полностью переходит в углекислый газ. Из этого следовало, что алмаз состоит из атомов углерода. Стало ясно: чтобы получить алмаз, надо исходить из графита или других содержащих углерод веществ.

Но как заставить атомы углерода образовать кристалл алмаза? Какие для этого нужны условия?

Ученые знали, что алмаз, устойчивый при обычных температурах, при нагревании без доступа воздуха переходит в графит. Это наводило на мысль, что и обратное превращение надо искать при высоких температурах. Но как вызвать это превращение, как заставить графит перейти в алмаз?

Из сравнения плотности угля ($1{,}3\times10^3$ кг/м^3), графита ($2{,}2\cdot10^3$ кг/м^3) и алмаза ($3{,}5\cdot10^3$ кг/м^3) следовало, что для получения алмаза уголь и графит надо уплотнить, сжать — применить высокое давление.

kvant.mccme.ru



Итак, высокие давления и высокие температуры — вот что может принести успех!

К такому же выводу можно было прийти, рассматривая условия образования алмазов в природе.

Действительно, изучение алмазных месторождений показывает, что образование алмазов происходило, по-видимому, глубоко в недрах Земли, в условиях высоких давлений и температур. Подземными взрывами алмазы вместе с окружающей их породой были выброшены по трубчатым прорывам на земную поверхность.

Давно было замечено, что в метеоритах, состоящих из железа, часто встречаются вкрапления графита. Но совершенно неожиданно в 1882 году алмазы были найдены в железном метеорите, упавшем в Венгрии, а позднее, в 1891 году, алмазы обнаружили в огромном метеорите, упавшем в Аризоне (США).

Считалось, что метеориты представляют собой обломки застывшей магмы, выброшенной из вулканов планет. При остывании давление внутри метеоритов повышалось, и возникали условия, в которых могли образоваться алмазы.

В 1893 году французский химик А. Муассан решил повторить в лаборатории естественный процесс образования алмазов в метеоритах — быстро охладить расплавленное железо, содержащее углерод.

В этот период Муассан изучал химические реакции, проходящие при очень высоких температурах, которые он получал с помощью вольтовой дуги в особой электрической печи. Устройство печи показано на рисунке 1. В куске негашеной извести *A* было сделано углубление для тигля *п*; над тиглем находились два угольных электрода *C* и *D*. Все это закрывалось крышкой *B* из куска извести. Когда угли подключали к источнику тока, между ними загоралась

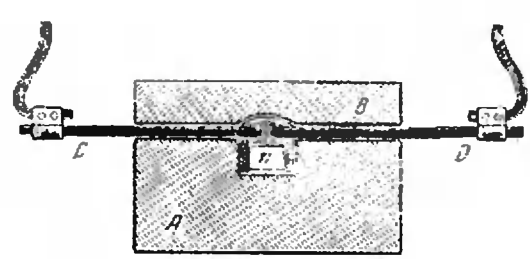


Рис. 1. Электрическая печь Муассана.

kvant.mccme.ru

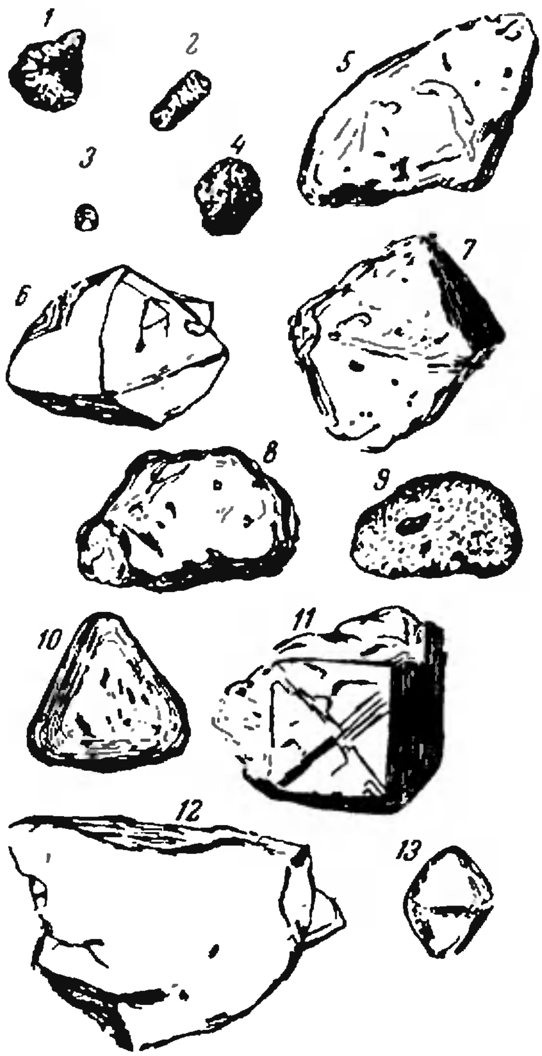


Рис. 2. Алмазы, полученные Муассаном (зарисовка). 1—4 — алмазы черного цвета; 5, 6 — желтоватые алмазы; 7 — бесцветный, чистой воды; 8, 9 — бесцветные с черными точками; 10, 11 — бесцветные; 12 — ноздреватый, похожий на бразильские алмазы; 13 — алмаз правильной формы.

вольтова дуга и нагревала тигель и помещенные в него вещества до очень высокой температуры.

Муассан решил использовать свою высокотемпературную печь для получения алмазов. Он проделал в дне печи отверстие и под ним поставил сосуд с водой. В печи железо расплавлялось, насыщалось углеродом, и капельки этого насыщенного углеродом расплавленного железа падали в холодную воду. Внешние слои капельки быстро охлаждались и, сжимаясь, оказывали огромное давление на находящееся внутри и еще не успевшее остыть железо. Получавшиеся железные шарики растворялись в кислотах. Внутри шариков были найдены маленькие кристаллики более или менее правильной формы размером до 0,5—0,7 мм (рисунок 2). Эти кристаллики были очень твердые, и химический анализ — сжигание в кислороде — показал, что они состоят из чистого углерода.

Четыре кристаллика были черного цвета, два желтоватых, остальные бесцветные. Три кристаллика с черными точками очень напоминали бразильские алмазы. Один был исключительно правильной формы. Кристалл самой «чистой воды» Муассан назвал «регентом».

Получение алмазов в лаборатории вызвало мировую сенсацию. Однако многочисленные попытки других ученых повторить опыты Муассана оказались безрезультатными. Только немецкому профессору Руффу удалось получить маленький кристаллик размером 0,05 мм, который по удельному весу, свечению в ультрафиолетовых лучах и горению в кислороде был признан алмазом.

Известны имена и других ученых, занимавшихся «алмазотворением». Н. В. Каразин в России (1823 г.), Каньяр-Латур и Ганналем во Франции (1829 г.) «жжением угля» получили кристаллы, похожие на алмазы, но они оказались карбидами — соединениями металлов с углеродом. В России К. Д. Хрущев (1893 г.) пытался получить алмазы кристаллизацией углерода из расплава серебра при атмосферном давлении, и также получил прозрачные кристаллы карбидов.

Все это были поиски вслепую.

Впервые условия образования алмазов были определены в работах советского физика О. И. Лейпунского, который в 1931 году рассчитал давления и температуры, необходимые для превращения графит→алмаз.

Комментируя свои расчеты, О. И. Лейпунский писал: «Во-первых, надо нагреть графит не меньше, чем до 2000 градусов, чтобы атомы углерода могли переходить с места на место. Во-вторых, его надо при этом сжать чудовищным давлением, не меньше чем 60 тысяч атмосфер [≈6 ГПа]. Тогда он обязательно перейдет в алмаз, подобно тому, как камень, подброшенный рукой, обязательно поднимется с земли в воздух».

Рассчитанная О. И. Лейпунским кривая равновесия между графитом и алмазом изображена на рисунке 3. По оси абсцисс отложено давление в ГПа, по оси ординат — температура в

kvant.mccme.ru

градусах Кельвина. Поле, лежащее справа от кривой равновесия и охватывающее область высоких давлений, соответствует условиям стабильности алмаза. Поле слева от кривой соответствует условиям стабильности графита. Это значит, что если процесс выделения углерода (например, в результате химической реакции или осаждения из раствора) происходит при температуре и давлении, соответствующих правому полю (например, точке p_1, T_1), то углерод будет образовывать кристаллы алмазов; если p и T соответствуют левому полю (например, точке p_2, T_2) — образуются кристаллы графита. При давлениях и температурах, соответствующих точкам кривой равновесия, углерод будет выделяться в виде алмаза и графита одновременно. Алмаз, находящийся в условиях стабильности графита (левое поле), превращается в графит, а графит, помещенный в условиях стабильности алмаза (правое поле), переходит в алмаз. Однако эти превращения при комнатной температуре протекают очень медленно. Поэтому в обычных условиях алмазы существуют миллионы лет. При нагревании скорость превращения увеличивается. При температуре 1800 К и атмосферном давлении алмаз чернеет и быстро превращается в графит. Температуру 1800 К называют температурой графитизации алмаза. Прямое превращение графита в алмаз при комнатной температуре осуществить не удалось, даже подвергая графит чудовищным давлениям в 40 ГПа. Причина неудачи — необычайно малая скорость превращения при комнатной температуре. Для получения заметных количеств алмаза в этих условиях процесс должен протекать миллионы лет. Лишь при температуре 3000 К и давлении 12 ГПа удалось получить из графита прозрачные бесцветные кристаллики алмаза.

Обеспечить условия прямого перехода графит→алмаз необычайно трудно, поэтому для производства алмазов используют иные процессы — например, выделение углерода из раствора в жидком металле (например, железе), требующее не столь высоких давлений и температур. Понятно, что в этом случае рабочая область (значения T и p) должна одновременно быть областью стабильного

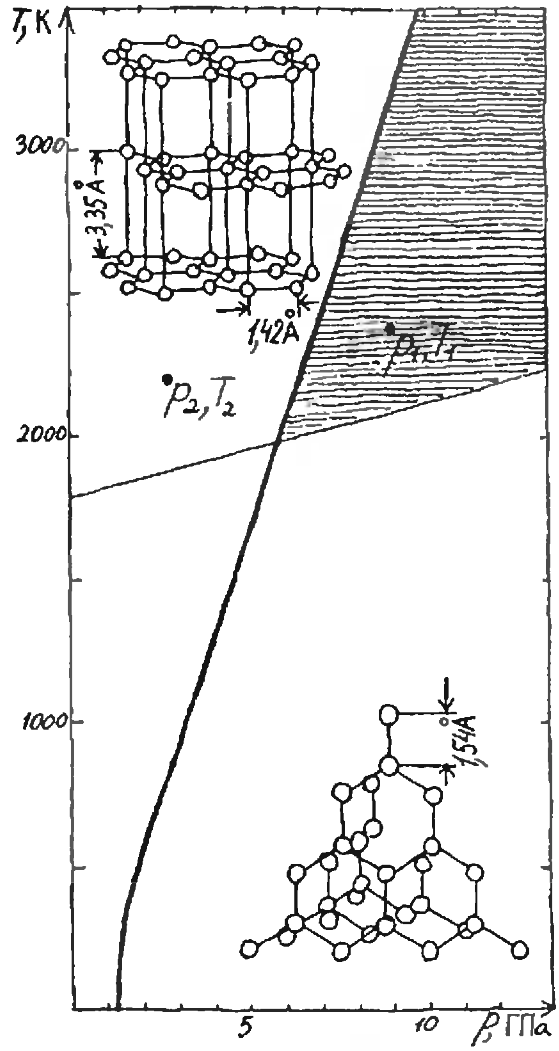


Рис. 3. Кривая равновесия графит — алмаз, рассчитанная О. И. Лейпунским, и расположение атомов углерода в алмазе и графите. В кристалле алмаза каждый атом углерода соединен прочными ковалентными связями с четырьмя соседними атомами, одинаково расположенными в пространстве. Этим объясняется высокая твердость алмаза.
В кристалле графита каждый атом углерода соединен тремя ковалентными связями с тремя соседними атомами, лежащими в том же слое. Большие расстояния и слабая связь между слоями обуславливают «низкие» механические свойства графита.

алмаза и областью существования жидкого железа. Чтобы определить эту область, проведем на рисунке 3 кривую зависимости температуры плавления железа от давления (синяя линия). Как видно из графика, углерод будет выделяться из расплавленного железа в виде алмазов при давлениях $p \geqslant 6$ ГПа. (Если в опытах Муассана в остывающей капле железа возникало давление больше 6 ГПа, то он мог получить алмазы! Мы про-

kvant.mccme.ru

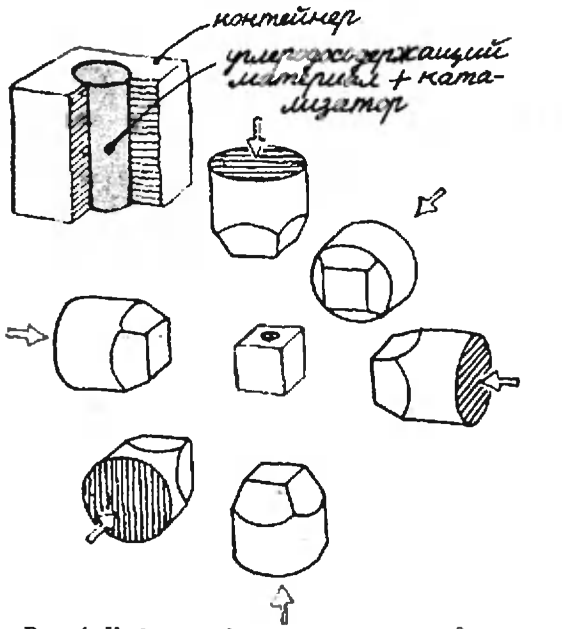


Рис. 4. Кубический аппарат высокого давления.

верим это предположение в конце статьи.)

Создать столь высокие давления в сочетании с высокими температурами оказалось трудной задачей. Попытки американского ученого П. Бриджмена, основателя физики высоких давлений, получить алмазы в лаборатории окончились в 1940 году неудачей. Лишь в 1955 году в печати появилось сообщение о том, что группа американских ученых во главе с Ф. Банди получила первые алмазы.

В Советском Союзе проблема получения искусственных алмазов была решена в 1960 году коллективом сотрудников Института физики высоких давлений АН СССР, возглавляемым академиком Л. Ф. Верещагиным. В 1961 году были получены 2000 каратов (1 карат$=2\cdot10^{-4}$ кг) алмазов, а сейчас наша промышленность производит сотни тысяч каратов алмазов в год.

Для промышленного получения искусственных алмазов была разработана специальная аппаратура. Прежде чем познакомиться с принципами ее работы, поговорим о способах создания высоких давлений.

Давайте мысленно проделаем следующий эксперимент. В толстостенный стальной стакан с внутренним диаметром 10 см нальем воду и вставим поршень с уплотнением. Вдвигая поршень в стакан, будем сжимать воду. Чтобы уменьшить ее объем на 18 %, нам придется приложить к поршню огромную силу — 7,8 МН! При этом в воде давление будет равно 1 ГПа, что в 10 000 раз больше атмосферного. При таком давлении и комнатной температуре вода затвердеет. В интервале давлений 1—2 ГПа твердеют практически все жидкости и начинают разрушаться стальные поршни, так как механические напряжения в них превосходят предел прочности стали.

Более высокие давления можно получить, сжимая твердые тела.

Приложим к двум противоположным граням кубика из твердого вещества сжимающие силы. Тогда внутри кубика, в сечении, перпендикулярном приложенным силам, разовьется механическое напряжение $\sigma=F/S$, где F — величина силы, S — площадь сечения кубика. Когда это напряжение превысит предел прочности на сжатие материала кубика — он разрушается. Но если на каждую пару противоположных граней кубика действовать одновременно строго одинаковыми сжимающими силами, то в кубике в трех взаимно перпендикулярных сечениях будут возникать одинаковые напряжения σ_1, σ_2, σ_3, и даже при самых высоких сжимающих усилиях кубик не разрушится. Такое равномерное сжатие создает во внутренних областях кубика всестороннее давление $p=\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$.

На этом принципе работает кубический аппарат высоких давлений, изображенный на рисунке 4. Шесть особой формы деталей, называемых пуансонами, сводятся одновременно к центру по трем взаимно перпендикулярным направлениям. Пуансоны сжимают контейнер — кубик из пластического материала, помещенный в центре аппарата. Сведение пуансонов производится с помощью шести поршней гидравлического пресса. Пресс отрегулирован таким образом, что силы, действующие на разные грани кубика, всегда равны, и в кубике создается всестороннее давление.

Часто применяют более простые аппараты, состоящие из двух пуансонов с лунками, которые сжимают контейнер, имеющий форму чечевицы (рисунок 5).

Самый мощный гидравлический пресс для научных исследований, развивающий усилие до 500 МН, имеет высоту многоэтажного дома. Он используется для создания высоких давлений в аппаратах большого объ-

kvant.mccme.ru

ема. Большая часть пресса расположена под землей, а над уровнем пола возвышается лишь верхняя часть пресса с рабочим пространством, в которое помещают аппараты высокого давления. В этом пространстве может свободно разгуливать человек.

Материалом для пуансонов, которые должны выдерживать огромные сжимающие напряжения, служит карбид вольфрама, сцементированный кобальтом. Этот сверхтвердый сплав много прочнее стали.

Контейнеры изготавливают из глинистого минерала пирофиллита или других подобных ему материалов. Пирофиллит — плохой проводник тепла и электричества. Это позволяет получать в контейнере высокие температуры, используя для нагрева электрический ток.

В контейнер помещают графит и металл-катализатор (железо, никель или их сплавы) и сжимают его между пуансонами. Когда достигнуто необходимое давление ($p \geqslant 6$ ГПа), через пуансоны пропускают электрический ток, который нагревает содержимое контейнера до высокой температуры. Таким образом создаются условия, соответствующие p — T-области образования алмаза.

За процессом следят по силе тока, протекающего через аппарат. Алмаз не электропроводен, и его образование вызывает увеличение электросопротивления содержимого контейнера и, соответственно, уменьшение тока через аппарат. После окончания процесса выключают нагрев, дают контейнеру охладиться, снимают давление и извлекают контейнер из аппарата.

Полученные алмазы — кристаллики размером от долей миллиметра до 1—2 миллиметров — отмывают в кислотах от частичек металла и графита, сортируют и отправляют на изготовление алмазного инструмента.

Ученые разработали и другие способы получения алмазов и изделий из них. Если процесс вести в присутствии катализатора (ускорителя) при более высоких давлениях, то образуется огромное количество мельчайших кристаллов алмаза одновременно, которые срастаются в прочный поликристаллический блок больших размеров черного цвета — карбонадо. Карбонадо обладают большей прочностью и более стойки к ударам, чем обычные алмазы.

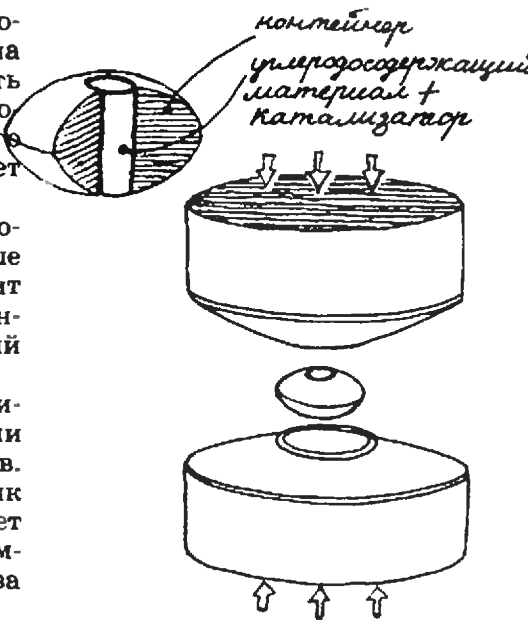


Рис. 5. Аппарат типа «чечевица».

Поликристаллические алмазы можно получать любой желаемой формы и таким образом избежать трудоемких операций обработки алмазных блоков. Для этого заготовке из углеродсодержащего материала придают с учетом усадки необходимую форму, помещают в трубочку-нагреватель, засыпают порошкообразным катализатором и помещают сборку в контейнер. После образования поликристаллических алмазов из контейнера вынимают готовое алмазное изделие заданной формы — например, в виде резца. Осталось заточить у него режущую кромку, закрепить в держателе и поставить на станок. Алмазные резцы в сотни раз более стойки, чем обычные. Ими обрабатывают твердые сплавы, металлы, пластмассы. Алмазные резцы работают на огромных скоростях и дают высокую чистоту обрабатываемой поверхности.

Из кристаллов алмаза, спеченных с металлической связкой, делают пилы и шлифовальные круги для резки и обработки твердых металлов, графита, камней.

Алмазные коронки и долота применяются при бурении скважин в горных породах. При этом скорость бурения возрастает больше чем в два раза, а стоимость работ снижается на 40—60 %.

Невозможно перечислить все профессии алмаза, ведь сейчас выпускается более 5000 видов алмазного инструмента. Подсчитано, что каждый карат алмаза сберегает народному хозяйству около 100 рублей, а вся экономия по стране составляет многие миллионы рублей в год.

Алмаз оказался помощником ученых в исследованиях при высоких давлениях. В миниатюрных аппаратах-наковальнях из алмазов получают огромные давления в миллионы атмосфер (100 ГПа), и так как алмазы прозрачны для света, рентгеновских лучей и других видов излучения, то ученые могут видеть, что происходит при этих давлениях с веществом, исследовать его с помощью рентгеновских лучей.

Недавно в Институте физики высоких давлений имени Л. Ф. Верещагина АН СССР были получены полупроводниковые алмазы и был создан на их основе электронный прибор термистор — высокочувствительный тепловой датчик.

Так перед алмазом, сделанным руками человека, открылось новое поле деятельности — мир электроники.

Получил ли Муассан алмазы?

Оценим, какие давления могли создаваться внутри остывающих капелек железа в опытах Муассана. Представим такую остывающую капельку в виде жесткой сферической оболочки — корки из твердого железа, внутри которой находится жидкое железо, насыщенное углеродом.

При изменении температуры от T_1 до $T_2 = T_1 + \Delta T$ объем оболочки изменится от V_1 до

$$V_2 = V_1(1 + \alpha\Delta T),$$

где α — коэффициент объемного термического расширения. Относительное изменение объема составит

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{V_2 - V_1}{V_1} = \alpha\Delta T. \qquad (1)$$

При охлаждении ($\Delta T < 0$) корка-оболочка уменьшится в объеме и сожмет жидкую середину капли. Относительное изменение объема жидкой капли будет $\Delta V/V_1$. Определим, какое давление возникнет внутри жидкого железа при таком сжатии.

Вспомним, что механическое напряжение, возникающее при растяжении образца, прямо пропорционально относительному удлинению:

$$\sigma = E\frac{\Delta l}{l_0},$$

где коэффициент пропорциональности E — модуль Юнга.

Аналогичной зависимостью связаны давление, возникающее при всестороннем сжатии образца, и относительное изменение объема:

$$p = -B\frac{\Delta V}{V_1}, \qquad (2)$$

где коэффициент пропорциональности B называют модулем объемной упругости. Он, так же как и σ, имеет размерность давления. Знак минус показывает, что уменьшение объема приводит к увеличению давления внутри капли.

Подставив (1) в (2), получим выражение для давления внутри остывающей капли:

$$p = -B\alpha\Delta T. \qquad (3)$$

Проведем численную оценку этой величины.

Корка-оболочка твердого железа, которая образовалась при попадании капельки в воду, охлаждается от температуры плавления (затвердевания) железа 1811 К до температуры воды, которую примем равной 293 К (20 °С), то есть

$$\Delta T = -1518\ \text{К} \approx -1{,}5 \cdot 10^3\ \text{К}.$$

Значение коэффициента объемного термического расширения примем равным

$$\alpha = 35 \cdot 10^{-6}\ \text{К}^{-1}.$$

Модуль объемной упругости жидкого железа положим равным модулю объемной упругости твердого железа:

$$B = 168\ \text{ГПа}.$$

Подставив эти данные в формулу (3), получим величину давления внутри остывающей капли:

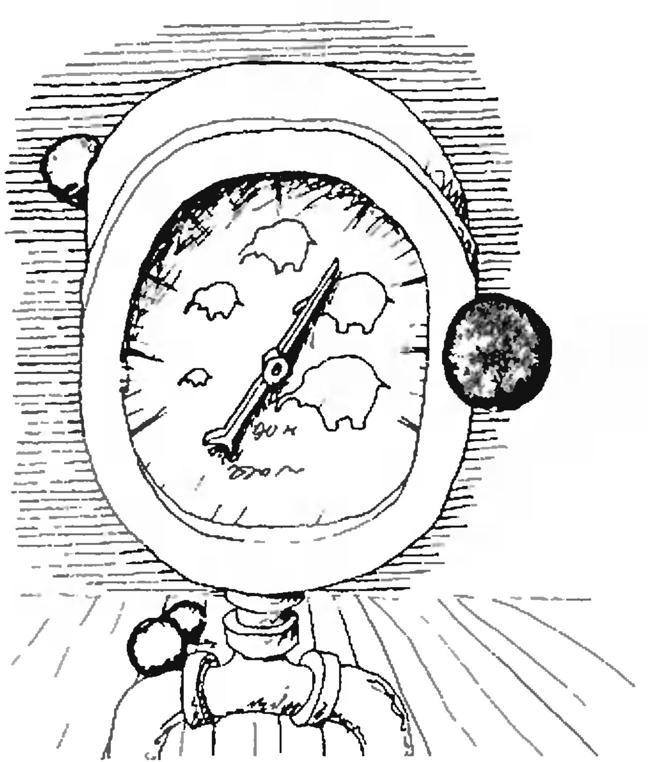
$$p = -B\alpha\Delta T = -(168 \cdot 35 \cdot 10^{-6}(-1{,}5 \cdot 10^3))\,\text{ГПа} \approx 8{,}9\ \text{ГПа}.$$

Это давление в 1,5 раза больше необходимого для осаждения углерода из расплавленного железа в виде алмазов.

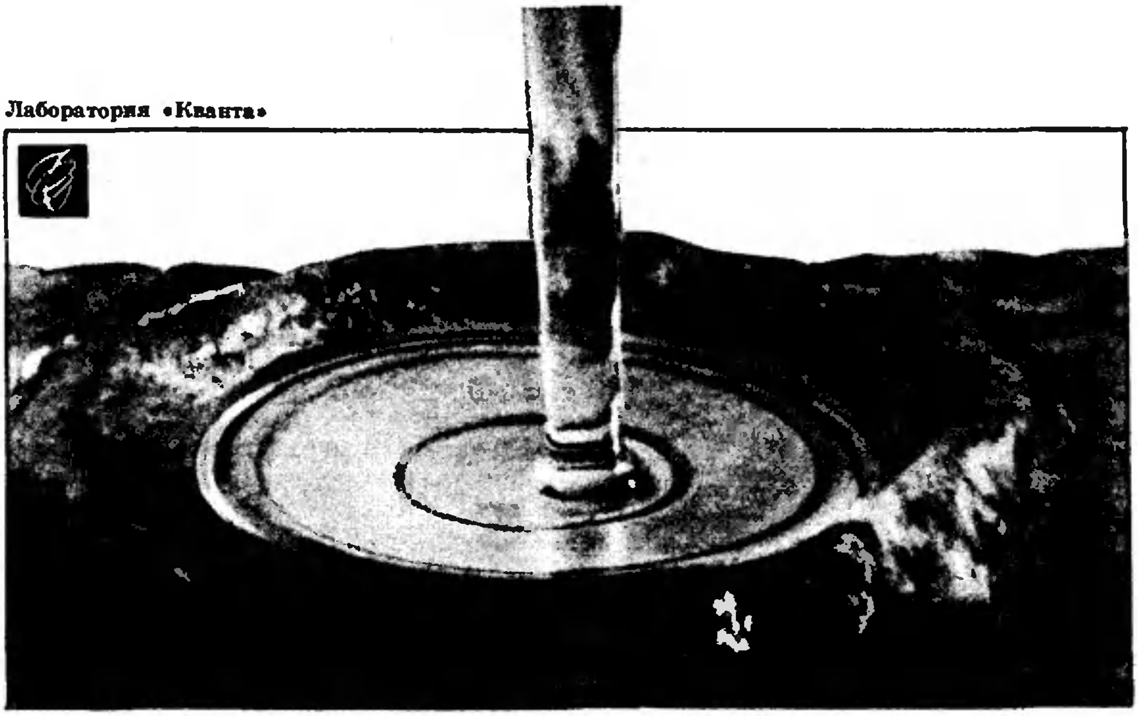
Наша оценка, конечно, носит приблизительный характер. Мы не учитывали, например, разницы в температурах внутренних и внешних своев оболочки, различия в свойствах чистого железа и насыщенного раствора углерода в железе; мы не учитывали уменьшения объема при затвердевании железа, а также прочности и упругости оболочки, которая несколько увеличивает свой объем под действием создаваемого давления, и т. п.

Эти факторы по-разному влияют на величину расчетного давления. Можно ожидать, однако, что в сумме их учет существенно не изменит результат.

Итак, наша оценка показывает, что в опытах Муассана могли образоваться алмазы.



kvant.mccme.ru



Еще раз о ложке в струе воды

Кандидат физико-математических наук
А. Н. ЛУЗИН

Возьмем обыкновенную глубокую тарелку, нальем в нее воду и поставим в кухонную раковину. На край тарелки положим легкую алюминиевую ложку, так, чтобы пустая она плавала, а наполненная водой — тонула.

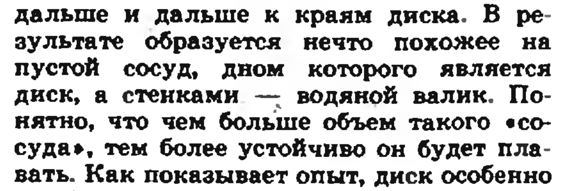
Придержим плавающую ложку за черенок и направим на нее струю воды. Струя должна быть такой, чтобы в ложке остался только тонкий слой воды. Перестанем поддерживать ложку — а она не тонет, хотя на нее сильно давит вертикальная струя воды. Опыт легко удается, если струя ровная, гладкая, без видимых завихрений. (Именно такая струя и течет обычно из кухонного смесителя.)

Опыт выглядит более эффектно, если вместо ложки взять плоский диск, например металлическую крышку от консервной банки. Крышка с герметизирующей резиной плавает еще более устойчиво. В качестве диска можно использовать также аккуратно вырезанное дно жестяной консервной банки.

Плавающий диск не будет «убегать» в сторону из-под струи воды, если в центре его имеется небольшое по «высоте» (1—2 мм) и диаметру (10—20 мм) углубление. Такие углубления почти всегда есть на крышках и донышках консервных банок. Если же углубления нет, его легко сделать, положив диск на хоккейную шайбу и постучав по его центру молотком.

Почему же диск (и ложка) не тонет? Понаблюдайте некоторое время, и вы увидите, что на поверхности диска возникает водяной валик, который растекающаяся тонким слоем вода отгоняет все дальше и дальше к краям диска. В результате образуется нечто похожее на пустой сосуд, дном которого является диск, а стенками — водяной валик. Понятно, что чем больше объем такого «сосуда», тем более устойчиво он будет плавать. Как показывает опыт, диск особенно устойчив в струе теплой воды. (Практический совет — если в наполняемую водой ванну опустить указанный диск, вода будет шуметь гораздо меньше.)

Теперь предлагаем вам превратить жестяной диск в плавающую и одновременно вращающуюся турбинку. Для этого край диска разрежьте на одинаковые «лепестки» и каждый из них с одной стороны загните. Можно ли сказать заранее — по часовой стрелке или против будет вращаться ваша турбинка? Попытайтесь также сделать игрушечный кораблик с водяными бортами, схематически изображенный на рисунке. С помощью насоса



и наклонных труб-стоек вода засасывается из сосуда, в котором плавает кораблик, под напором подается в центр диска и растекается по нему тонким слоем. А дальше все происходит точно так же, как и с обычным диском.

kvant.mccme.ru

Математика 8—10

Заметка «Формула Герона» адресована восьмиклассникам.
Заметка «Где ошибка?» — девятиклассникам и десятиклассникам.

Формула Герона

В учебном пособии А. В. Погорелова «Геометрия 6—8» на с. 166 разбирается задача 26, в которой предлагается вывести следующую формулу для площади треугольника:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

a, b, c — длины сторон треугольника, p — его полупериметр.

Эта формула в честь древнегреческого ученого Герона Александрийского (около I в. н. э.) называется *формулой Герона* (она содержится, в частности, в геометрическом разделе математического трактата «Метрика», написанного Героном Александрийским).

В этой заметке мы дадим еще три доказательства формулы Герона, отличные от приведенного в решении задачи 26 из «Геометрии 6—10». Наши доказательства используют некоторые весьма полезные соотношения, с которых мы и начнем.

Пусть в треугольник ABC со сторонами $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ вписана окружность (рис. 1). Отрезки касательных, проведенных к этой окружности из точек A, B, C, равны (для каждой из этих точек); их длины обозначены на рисунке буквами x, y, z соответственно. Очевидно, что $x+y=c$, $x+z=b$, $y+z=a$, $x+y+z=p$, где p — полупериметр треугольника ABC, поэтому

$$x=p-a,\ y=p-b,\ z=p-c. \quad (1)$$

Рассмотрим теперь окружность, касающуюся стороны BC и продолжений сторон AB и AC (рис. 2). (Докажите сами, что такая окружность существует для любого треугольника и что ее центр — точка пересечения биссектрисы внутреннего угла BAC и внешних углов PBC и KCB треугольника ABC.) По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, $AP=AK$, $BP=BQ$, $CK=CQ$. Кроме того, $AP+AK=(AB+BQ)+(AC+CQ)=2p$. Следовательно,

$$AP=AK=p,\quad BQ=p-c,\quad CQ=p-b. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) часто применяются при решении планиметрических задач, поэтому их полезно запомнить (или, во всяком случае, знать об их существовании и уметь вывести).

Первое доказательство. Проведем в треугольнике ABC касательную MN к вписанной окружности, параллельную стороне AB (рис. 3). Треугольник AON прямоугольный, поскольку $\widehat{OAN}+\widehat{ONA}=\frac{1}{2}(\widehat{BAN}+\widehat{MNA})=90°$, при этом $OK=r$ — высота, опущенная из вершины прямого угла (буквой r обозначен радиус вписанной окружности). Следовательно, $KN=r^2/x$. Аналогично из прямоугольного треугольника BOM получаем, что $LM=r^2/y$. Далее, $MN=KN+LM=\frac{r^2(x+y)}{xy}$.

Из формул (2) следует, что z — полупериметр треугольника MNC. В подобных треугольниках MNC и BAC полупериметры относятся как сходственные стороны, поэтому $p:z=AB:MN$, то есть $p:z=(x+y):\frac{r^2(x+y)}{xy}$, откуда $p:z=xy:r^2$ и

$$pr^2=xyz. \quad (3)$$

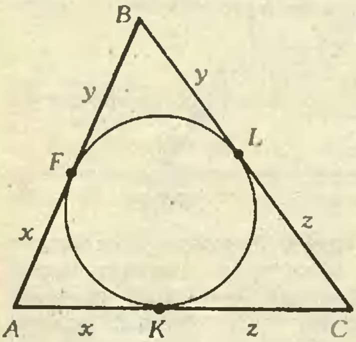


Рис. 1.

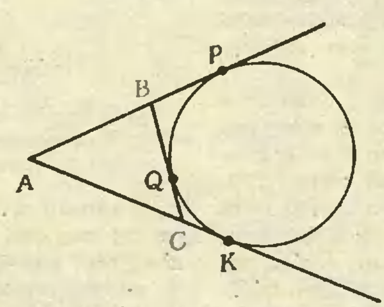


Рис. 2.

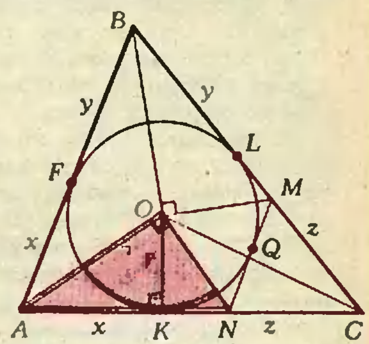


Рис. 3.

kvant.mccme.ru

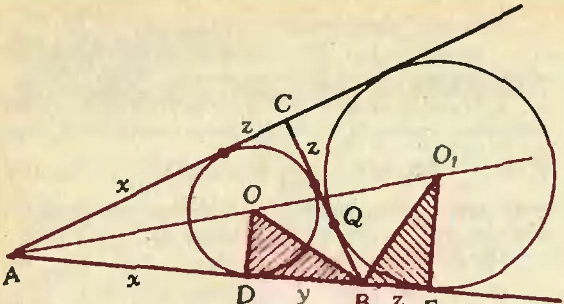


Рис. 4.

Легко видеть, что формула (3) эквивалентна формуле Герона: так как $S=pr$, то с учетом (1) и (3) получаем $S^2=p^2r^2=pxyz=p(p-a)(p-b)(p-c)$.

Второе доказательство. Пусть O_1 и r_1 — центр и радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AC и AB, F — точка касания этой окружности с прямой AB (рис. 4). Тогда (см. формулы (2)) $BF=p-c=z$. Треугольники ODB и O_1BF подобны ($\widehat{ODB}=\widehat{BFO_1}=90^\circ$, $\widehat{FBO_1}=\frac{1}{2}\widehat{CBF}=\frac{1}{2}(180^\circ-\widehat{CBD})=90^\circ-\widehat{OBD}=\widehat{DOB}$). Следовательно, $OD:BF=DB:O_1F$, то есть $r:z=y:r_1$, откуда $r_1=yz/r$. Прямоугольные треугольники AO_1F и AOD также подобны, откуда $AF:AD=O_1F:OD$, поэтому $p:x=r_1:r$. Подставляя в это равенство $r_1=yz/r$, получим $p:x=yz/r^2$, то есть $pr^2=xyz$, что, как было показано в конце первого доказательства, эквивалентно формуле Герона.

Третье доказательство. Докажем сначала, что в любом треугольнике

$$\operatorname{ctg}(\widehat{A}/2)+\operatorname{ctg}(\widehat{B}/2)+\operatorname{ctg}(\widehat{C}/2)=\operatorname{ctg}(\widehat{A}/2)\operatorname{ctg}(\widehat{B}/2)\operatorname{ctg}(\widehat{C}/2). \quad (4)$$

Действительно,

$$\operatorname{ctg}(\widehat{C}/2)=\operatorname{ctg}((180^\circ-\widehat{A}-\widehat{B})/2)=\frac{\operatorname{tg}(\widehat{A}/2)+\operatorname{tg}(\widehat{B}/2)}{1-\operatorname{tg}(\widehat{A}/2)\operatorname{tg}(\widehat{B}/2)},$$

поэтому

$$\operatorname{ctg}(\widehat{A}/2)+\operatorname{ctg}(\widehat{B}/2)+\operatorname{ctg}(\widehat{C}/2)=\frac{\operatorname{tg}(\widehat{A}/2)+\operatorname{tg}(\widehat{B}/2)}{\operatorname{tg}(\widehat{A}/2)\operatorname{tg}(\widehat{B}/2)}+\frac{\operatorname{tg}(\widehat{A}/2)+\operatorname{tg}(\widehat{B}/2)}{1-\operatorname{tg}(\widehat{A}/2)\operatorname{tg}(\widehat{B}/2)}=\frac{\operatorname{ctg}(\widehat{A}/2)+\operatorname{ctg}(\widehat{B}/2)}{1-\operatorname{tg}(\widehat{A}/2)\operatorname{tg}(\widehat{B}/2)};$$

$$\operatorname{ctg}(\widehat{A}/2)\operatorname{ctg}(\widehat{B}/2)\operatorname{ctg}(\widehat{C}/2)=\operatorname{ctg}(\widehat{A}/2)\operatorname{ctg}(\widehat{B}/2)\times\frac{\operatorname{tg}(\widehat{A}/2)+\operatorname{tg}(\widehat{B}/2)}{1-\operatorname{tg}(\widehat{A}/2)\operatorname{tg}(\widehat{B}/2)}=\frac{\operatorname{ctg}(\widehat{A}/2)+\operatorname{ctg}(\widehat{B}/2)}{1-\operatorname{tg}(\widehat{A}/2)\operatorname{tg}(\widehat{B}/2)}.$$

Из прямоугольного треугольника AOK (см. рис. 3) находим $\operatorname{ctg}(\widehat{A}/2)=x/r$, аналогично $\operatorname{ctg}(\widehat{B}/2)=y/r$, $\operatorname{ctg}(\widehat{C}/2)=z/r$. Подставляя эти значения в (4), получаем $x/r+y/r+z/r=xyz/r^3$, откуда $pr^2=xyz$, что эквивалентно формуле Герона.

Отметим, что все наши рассуждения можно провести в обратном порядке и вывести из формулы Герона равенство (4). Проделайте это самостоятельно.

А. Д. Белый

Где ошибка?

Пользуясь стандартными методами решения школьных задач, следует помнить, что каждый из этих методов имеет определенные границы применимости, забвение которых может привести к ошибкам. Особенно поучительны случаи, когда такую ошибку допускают сами авторы задачи. Ниже приводятся три задачи, взятые из различных учебных пособий, вместе с приведенными там неправильными ответами или решениями. Попытайтесь исправить ошибки (правильные ответы и указания приведены на с. 57).

1. *При каких значениях a уравнение $x^2-4x+a^2-1=0$ имеет два корня, больших 1?*

Решение. Условие задачи равносильно системе неравенств

$$x_1+x_2>2,\ x_1x_2>1,$$
$$D=16-4(a^2-1)>0$$

(x_1, x_2 — корни). Эта система равносильна системе

$$4>2,\ a^2-1>1,\ a^2<5,$$

решая которую, получаем

Ответ: $\sqrt{2}<a<\sqrt{5}$ или $-\sqrt{5}<a<-\sqrt{2}$.

2. *$ABCD$ — правильный тетраэдр. Точка X такова, что $XA=XC$, $XB=XD$, $XA=\sqrt{3}\,XD$. Установите положение точки X относительно тетраэдра.*

Ответ: граничная.

3. *В каждый из трехгранных углов прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которой $ABCD$ — ромб, $AC=8$, $BD=6$, $AA_1=1$, вписан шар, касающийся конуса с вершиной в точке $O=(A_1C_1)\cap(B_1D_1)$ и основанием, вписанным в ромб $ABCD$.* Найдите радиусы шаров.

Ответ: $\frac{12}{29}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{12}{25}$, $\frac{3}{5}$.

П. П. Горнуша

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Докажите, что ни при каком натуральном n число $n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ не может быть точным квадратом.

2. Постройте отрезок с серединой в данной точке так, чтобы его концы лежали на данной прямой и данной окружности.

3. Найдите все натуральные числа n, для которых число n^3+3 делится на $n+3$.

4. Существует ли треугольник с высотами $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$?

5. Автомобилист собирается пересечь пустыню. Его машина тратит 1 л бензина на 10 км пути. Автомобилист имеет 450 л бензина, но может взять с собой не более 150 л. Однако он может преодолеть более 1500 км, оставляя по пути следования часть бензина и возвращаясь обратно для пополнения бензобака. Пустыню какой наибольшей ширины может пересечь автомобилист?

Девятый класс

6. Что больше: $7^{\sqrt{5}}$ или $5^{\sqrt{7}}$?

7. Двумя отрезками длины 1 отсеките от данного угла четырехугольник наибольшей площади.

8. В последовательности $\{u_n\}$

$$u_1=u_2=1 \text{ и } u_{n+2}=u_{n+1}^2+u_n^2\ (n\geqslant 1).$$

Делится ли число u_{1986} на 7?

9. На сторонах AB и AC треугольника ABC берутся точки M и N соответственно так, что $AM=\frac{1}{n}AB$, $AN=\frac{1}{n+1}AC$. Докажите, что при всех натуральных n прямые MN проходят через одну и ту же точку, и найдите ее.

10. Решите уравнение

$$\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x.$$

Десятый класс

11. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неотрицательные числа, сумма которых равна 1. Чему равно наибольшее значение величины $x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n$?

12. Докажите, что если в тетраэдре все грани равновелики, то они все равны.

13. n — натуральное число. Докажите, что

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}<\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$

14. Одна треугольная пирамида целиком помещается внутри другой. Может ли сумма длин ребер у внутренней пирамиды быть больше, чем у внешней?

15. Найдите сумму коэффициентов при нечетных степенях x у многочлена $(x^5+x-1)^{1986}$.

Публикацию подготовил Л. Д. Курляндчик

Наша обложка

Тринадцать шаров в одной клетке

Хорошо известно, что на плоскости к одному кругу радиуса 1 можно приложить 6 кругов того же радиуса так, чтобы они его касались и друг друга не пересекали (рис. 1). При этом центры шести кругов лежат в вершинах правильного шестиугольника, а центр первого круга является центром этого шестиугольника. Не очень трудно строго доказать, что больше 6 кругов приложить нельзя.

А в пространстве? Сколько одинаковых материальных шаров можно приложить к такому же шару? Многие знают, что ответ — 12. Но можно ли столь же наглядно и четко, как с кругами, представить себе картину расположения 12 шаров, приложенных к одному шару? Оказывается — можно (см. 4-ю с. обложки).

Для начала представим себе шар, который касается всех 12 ребер некоторого куба (рис. 2). Такой шар называется *полувписанным* в куб. Теперь изготовим «клетку» для 13 шаров. Для этого разобьем большой куб на 27 одинаковых кубиков. Остов этого разбиения, то есть ребра всех составляющих кубиков, и образует искомую «клетку». Мысленно закрасим это разбиение в «шахматном порядке» так, чтобы черными были центральный кубик и те 12 кубиков, которые имеют с ним ровно одно общее ребро, а белыми — остальные 14. В каждый «черный» кубик полувписываем шар (рис. 3). Шары касаются ребер клеток и через них касаются друг друга. Двенадцать внешних шаров касаются центрального шара.

12 шаров можно приложить к такому же шару и другими способами. В связи с этим возникает вопрос: а нельзя ли приложить 13? По этому вопросу возник знаменитый спор еще у Исаака Ньютона и английского монаха и математика Грегори. Но этот спор был решен в пользу Ньютона (нельзя!) лишь в 1953 году в совместной статье Шютте и Ван-дер-Вардена.

В. В. Произволов

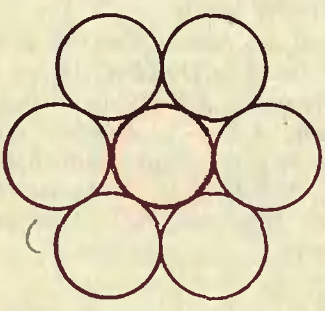


Рис. 1.

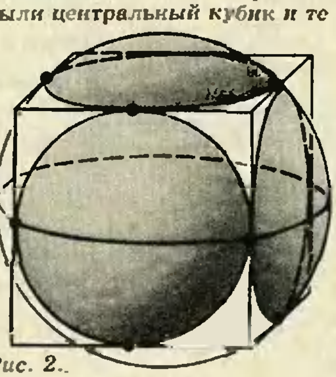


Рис. 2.

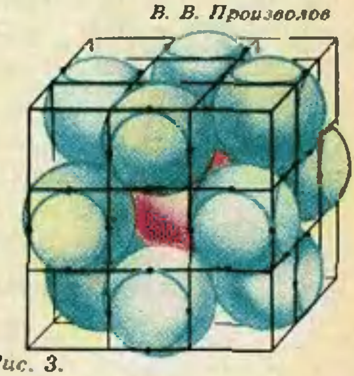
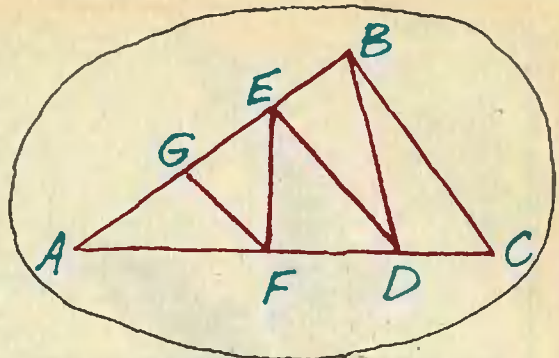


Рис. 3.

kvant.mccme.ru

kvant.mccme.ru

Квант для младших школьников



Задачи

1. Как в треугольнике ABC провести ломаную $BDEFG$ (см. рисунок), чтобы все пять полученных треугольников имели одинаковые площади?

2. Произведение миллиарда натуральных чисел равно миллиарду. Какое наибольшее значение может принять сумма всех этих чисел?

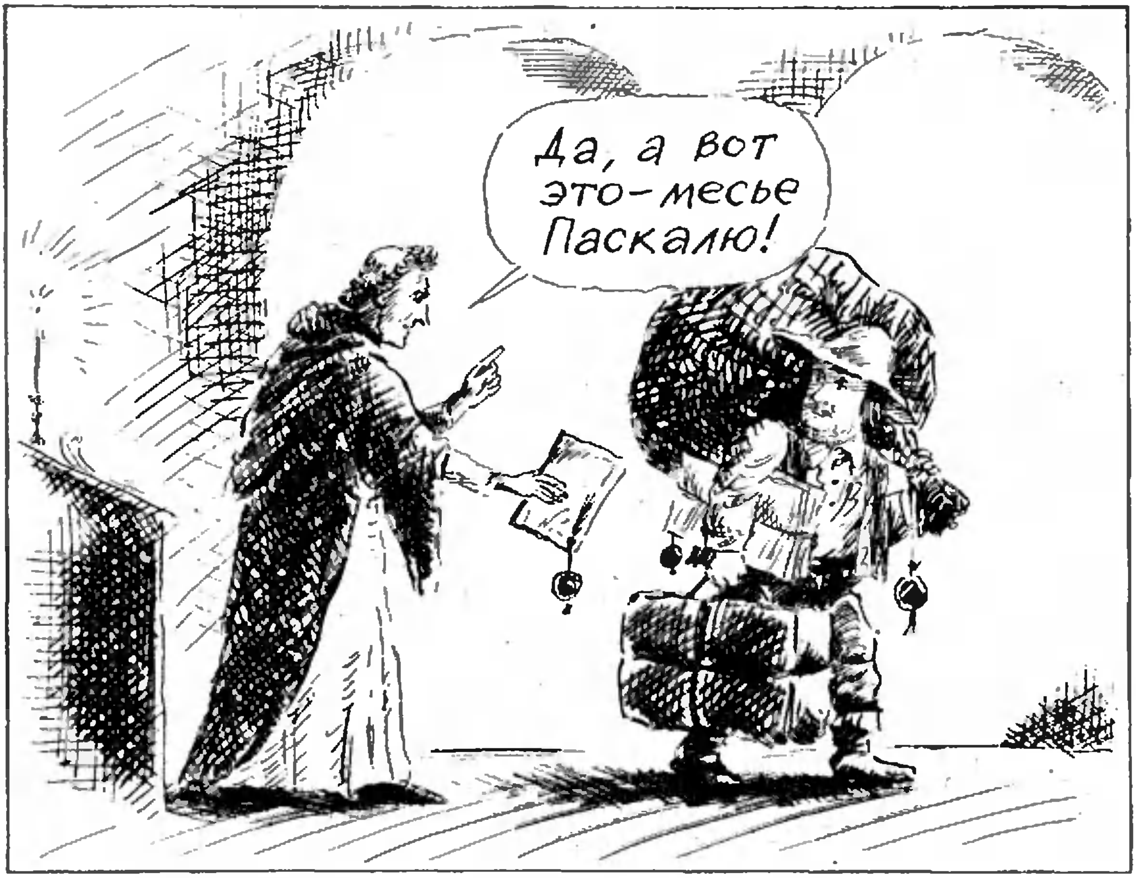
3. Можно ли к числу 9999 приписать справа еще четыре цифры так чтобы полученное восьмизначное число стало квадратом целого числа?

4. Два одинаковых чайника с водой одинаковой температуры поставили на одинаковые источники тепла. Через некоторое время вода в обоих чайниках закипела (см. рисунок). В каком чайнике вода закипела раньше?

5. Винни-Пух и Пятачок одновременно отправились в гости друг к другу. Но поскольку Винни-Пух всю дорогу сочинял очередную «шумелку», а Пятачок считал пролетавших галок, они не заметили друг друга при встрече. После встречи Пятачок подошел к дому Винни-Пуха через четыре минуты, а Винни-Пух подошел к дому Пятачка через одну минуту. Сколько минут был в пути каждый из них?

Эти задачи нам предложили *А. П. Савин, Г. А. Гальперин, Л. Д. Курляндчик, В. Д. Вьюн, С. Р. Сефибеков.*

kvant.mccme.ru



Числа Мерсенна

Математика, как и большинство современных наук, в настоящее время развивается со все возрастающей скоростью. В мире выходят сотни математических журналов, в которых публикуются ежегодно десятки тысяч научных работ. А 350 лет назад никаких математических журналов еще не было, и ученые обменивались результатами своих исследований в личных письмах. Правда, был один человек — французский монах Марен Мерсенн (1588—1648), который получал таких писем больше других. Написать об открытии новой теоремы Мерсенну означало установить свой приоритет, поскольку Мерсенн, как правило, сообщал об этом остальным своим корреспондентам, в числе которых были Р. Декарт, Б. Паскаль, П. Ферма, X. Гюйгенс и многие другие ученые того времени.

Эта деятельность Марена Мерсенна способствовала созданию в Париже Академии наук.

Из собственных математических достижений Мерсенна наибольшей известностью пользуются изученные им числа вида $M_n=2^n-1$.

Тот, кто знает, что такое геометрическая прогрессия, сразу заметит, что M_n равняется сумме первых n членов геометрической прогрессии с начальным членом $2^0=1$ и разностью 2:

$$M_n=2^0+2^1+2^2+...+2^{n-1}.$$

Мерсенна интересовало, какие из чисел $M_n=2^n-1$ являются простыми. Вопрос этот возник в задаче, поставленной древними греками (к ней мы еще вернемся).

Простые числа, получающиеся по формуле 2^n-1, и называются *числами Мерсенна*.

Попробуем и мы немного коснуться проблемы поиска чисел Мерсенна.

Вычислим несколько первых чисел $M_n=2^n-1$ и запишем их по порядку в таблицу из четырех столбцов. Первое наблюдение: числа, попадающие в один и тот же столбец, оканчиваются на одну и ту же цифру. А именно, числа, попадающие в первый столбец, оканчиваются на 1, во второй — на 3, в третий — на 7 и в четвертый — на 5 (попробуйте строго

kvant.mccme.ru

Таблица

M_1 = 1	M_2 = 3	M_3 = 7	M_4 = 15
M_5 = 31	M_6 = 63	M_7 = 127	M_8 = 255
M_9 = 511	M_{10} = 1.023	M_{11} = 2.047	M_{12} = 4.095
M_{13} = 8.191	M_{14} = 16.383	M_{15} = 32.767	M_{16} = 65.535
M_{17} = 131.071	M_{18} = 262.143	M_{19} = 524.287	M_{20} = 1.048.575
M_{21} = 2.997.151	M_{22} = 4.194.303	M_{23} = 8.388.607	M_{24} = 16.777.215
M_{25} = 33.554.431	M_{26} = 67.108.863	M_{27} = 134.217.727	M_{28} = 268.435.455
M_{29} = 536.870.911	M_{30} = 1.073.741.823	M_{31} = 2.147.483.647	M_{32} = 4.294.967.295
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
M_{4n-3}	$M_{2(2n-1)}$	M_{4n-1}	M_{4n}

обосновать это наблюдение). Значит, числа M_n, попадающие в четвертый столбец, делятся на 5, и среди них не может быть чисел Мерсенна.

Несложно доказать и в т о р о е н а б л ю д е н и е: числа, попадающие во второй и четвертый столбцы, делятся на 3. В самом деле, разность двух последовательных чисел M_{2k} и M_{2k+2} с четными номерами равна

$$(2^{2k+2}-1)-(2^{2k}-1)=2^{2k+2}-2^{2k}=3\cdot 2^{k}.$$

Поэтому, если число M_{2k} делится на 3, то и M_{2k+2} тоже делится на 3. А число M_2 равно трем.

Поэтому числа Мерсенна (за исключением $M_2=3$) имеет смысл искать только в первом и третьем столбцах.

Более пристальное изучение чисел M_n приводит к т р е т ь е м у н а б л ю д е н и ю: если n — составное число, $n=kl$, $k>1$, $l>1$, то M_n делится на M_k и на M_l. (Это следует из того, что $2^{kl}-1=(2^k)^l-1=(2^l)^k-1$, а $(x^m-1)=(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1)$.) Кстати, из третьего наблюдения вытекают и первые два, поскольку все числа во втором столбце делятся на $M_2=3$, а все числа в четвертом столбце делятся на $M_4=15$.

Итак, *число 2^n-1 будет простым только при условии, что n — простое.*

Но для любого ли простого p число M_p будет простым? Надежда на положительный ответ рушится очень быстро: уже число $M_{11}=2047=23\cdot 89$ является составным.

Сам Мерсенн указал все простые значения n, не превосходящие 257, для которых, по его мнению, числа $M_n=2^n-1$ будут простыми. Однако Мерсенн не дал доказательства; впоследствии выяснилось, что его предсказание было частично ошибочным.

Поисками чисел Мерсенна занимался и Леонард Эйлер, член Петербургской Академии наук, один из величайших математиков Нового времени. В 1750 году он обнаружил десятое по счету число Мерсенна; это $M_{31}=2\,147\,483\,647$.

Если раньше поиск чисел Мерсенна велся «кустарными» методами, то в 20-м веке в работу включились ЭВМ, считающие с огромной скоростью. В 1952 году было найдено сразу пять новых чисел Мерсенна: M_{521}, M_{607}, M_{1279}, M_{2203} и M_{2281}; они являются соответственно тринадцатым — семнадцатым числами Мерсенна. Следующие шесть чисел Мерсенна были найдены в период с 1958 года по 1963 год. Наконец, в 1971 году было найдено 24-е число Мерсенна M_{19937}, в 1978 году — 25-е число Мерсенна M_{21701}, в 1979 году — 26-е и 27-е числа Мерсенна M_{23209} и M_{44497}. Последнее известное нам число Мерсенна найдено в 1983 году: это M_{86243}; но пока неизвестно, является ли оно 28-м по счету числом Мерсенна.

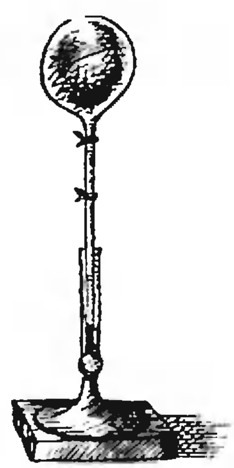
И в заключение объясним интерес к числам Мерсенна. Дело в том, что они связаны с так называемыми *совершенными числами* (которыми и занимались древние греки) — числами, равными сумме всех своих делителей, отличных, конечно, от самого числа (например, $6=1+2+3$, $28=1+2+4+7+14$, $496=1+2+4+8+16+31+62+124+248$ — первые три совершенных числа). Еще Евклид доказал (докажите и вы!), что *если число 2^n-1 простое, то число $2^{n-1}(2^n-1)$ — совершенное.* Леонард Эйлер доказал, что все ч е т н ы е совершенные числа имеют вид $2^{n-1}(2^n-1)$, где 2^n-1 — число Мерсенна. А н е ч е т н ы е совершенные числа? А нечетных совершенных чисел пока никто не нашел, и никто еще пока не доказал, что таких чисел нет.

По материалам *Ю. В. Королева* и *О. М. Мамедова*

Д. Фаренгейт и его термометры

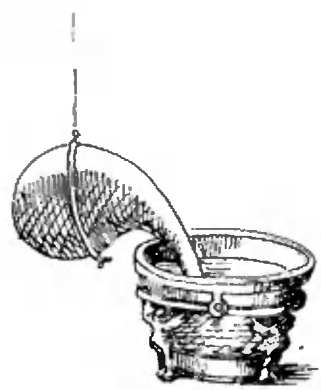
В этом году исполнилось 300 лет со дня рождения Даниеля Габриеля Фаренгейта (1686—1736) — создателя первых термометров, которыми можно было пользоваться как стандартными и надежными лабораторными приборами.

Считается, что идея использования для температурных измерений известного еще с античных времен свойства теплового расширения воздуха и жидкостей принадлежит Г. Галилею. В конце XVI века он изобрел основанный на этом принципе простой прибор — термоскоп, впервые позволивший в какой-то мере объективно судить об изменениях температуры. Термоскоп Галилея представляет собой небольшую стеклянную колбу, наполненную воздухом, с очень узким и длинным горлышком, опущенным в сосуд с водой. По мере нагревания или остывания колбы воздух в ней расширялся или сжимался и уровень воды соответственно понижался или повышался.



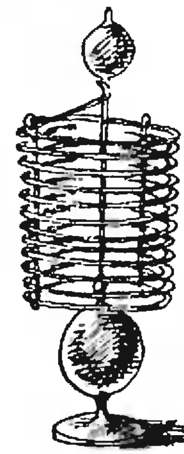
В течение следующего, XVII столетия многие ученые занимались усовершенствованием этого прибора. Так, в 1615 году его снабдили измерительной шкалой и с 1628 года все чаще стали называть уже не термоскопом, а термометром. В 1630 году на смену воздушным пришли более удобные жидкостные, прежде всего водяные, термометры. Десятилетием спустя их начали запаивать, чтобы на показания не влияли колебания атмосферного давления. С конца 50-х годов вслед за учеными из флорентийской «Академии опыта» в качестве термометрической жидкости стали чаще всего использовать винный спирт, не замерзающий при самых сильных морозах и обладающий небольшой вязкостью и сравнительно высоким коэффициентом теплового расширения.

Но, несмотря на то, что конструктивные принципы в основном определились, термометры, изготовлявшиеся в то время, были совершенно непригодны для точных и систематических температурных измерений. И прежде всего потому, что не существовало никакого соответствия



между их показаниями — каждый из них, по существу, показывал «свою» температуру. Да и могло ли быть иначе, если градуировка термометров производилась фактически произвольным образом — в разметке измерительных шкал царил полный разнобой, а за начало отсчета принимались, например, самые низкие зимние температуры во Флоренции или Магдебурге, температура размягчения сливочного масла или температурный уровень глубоких пещер.

Как избавиться от произвола в температурных измерениях, как сделать так, чтобы различные термометры давали «согласные» показания? По мере накопления опыта работы с термометрами становилось все более очевидным, что за начало температурной шкалы следует принимать какую-то «постоянную» (и легко воспроизводимую) температуру, например температуру тела здорового человека, точку замерзания или кипения воды. Эту идею выдвигали и с бо́льшим или меньшим успехом реализовывали в своих термометрах X. Гюйгенс, Р. Гук, И. Ньютон и другие ученые. Начиная

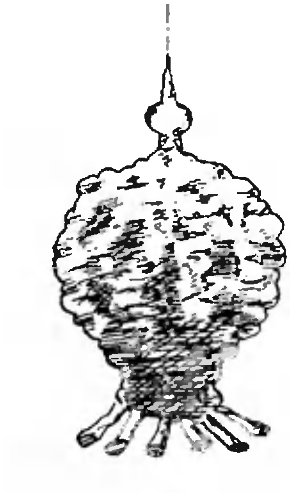


с 80-х годов XVII века все большую привлекательность приобретала идея построения температурной шкалы на основе двух «постоянных» точек (при таком способе отпадала необходимость в очень затруднительной операции определения объемов резервуара и капилляра у каждого экземпляра термометра).

Так, в 1701 году И. Ньютон построил термометр (с льняным маслом в качестве рабочей жидкости), на шкалу которого нанес 12 равноотстоящих делений, причем температуре замерзания воды соответствовало нулевое деление, а нормальной температуре человеческого тела — деление «12». В это же время начал изготовлять свои спиртовые термометры датский астроном О. Рёмер. За «постоянные» точки температурной шкалы он принимал температуры замерзания и кипения воды. В 1708 году Рёмера посетил Фаренгейт, которого датчанин во всех деталях ознакомил со своим способом градуировки термометров. По-видимому, Фаренгейт сразу же осознал, что этот способ содержит в себе решение давно назревшей задачи создания стандартных термометров, дававших «согласные» показания (в одинаковых условиях они показывали одинаковую температуру). Уже через пару лет он

kvant.mccme.ru

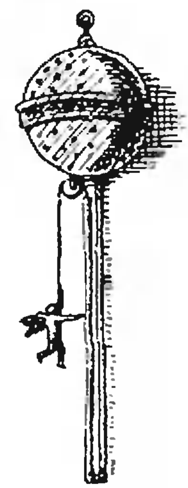
сумел наладить производство таких приборов, и они быстро завоевали признание в европейских лабораториях. Уче-



ными, свыкшимися с разнобоем в показаниях старых термометров, термометры Фаренгейта воспринимались как своего рода чудо. При этом нужно сказать, что Фаренгейт отнюдь не копировал рёмеровские термометры — он много работал над усовершенствованием их конструкций, изыскивал наиболее подходящие сорта стекла и, наконец, модифицировал шкалу, сделав ее значительно более удобной. Температурная шкала Фаренгейта до настоящего времени применяется в англоязычных странах. Она устроена так: интервал между точками таяния льда и кипения воды делится на 180 частей, причем первой точке присваивается значение 32, а второй 212 °F (градусов по шкале Фаренгейта).

Важнейшей заслугой Фаренгейта является также то, что он первый (в 1717 году) начал изготовлять ртутные термометры. Нужно сказать, что эту идею еще за полвека до него рассматривали флорентийские академики. Но тогда ртуть, из-за ее низкого коэффициента теплового расширения (раз в шесть меньше, чем у спирта), сочли малоперспективной. Фаренгейт пришел к заключению, что этот недостаток ртути с избытком компенсируется легкостью ее получения и сохранения в чистом виде, благодаря чему без затруднений выполняется требование тождественности рабочей жидкости, заполняющей различные экземпляры термометра. (Спирт в этом отношении менее удобен, так как, интенсивно поглощая воду, существенно изменяет коэффициент теплового расширения.)

О жизни Фаренгейта известно немного, его портрет до нас не дошел. Родился он в Данциге (ныне Гданьск) в купеческой семье, получил неплохое начальное образование. В 15-летнем возрасте он неожиданно лишился обоих родителей. «Отцы» города решили, что мальчик должен пойти по стопам отца, и в 1702 году послали его в Амстердам обучаться купеческому делу. Профессию он успешно освоил, но интересы его все более склонялись к естественным наукам и особенно



к конструированию точных научных приборов. По делам службы Фаренгейт часто выезжал из Амстердама в другие города Голландии и за границу, в том числе и в Россию, и всякий раз он старался не упустить возможности пополнить свои познания в технике и науке у ведущих мастеров — приборостроителей и ученых Европы. Так произошла упоминавшаяся выше встреча Фаренгейта с Рёмером, так же установились научные контакты со знаменитыми в те времена голландскими учеными — медиком Г. Бургаве и физиками В. Сгравесандом и П. ван Мусхенбруком, с будущим великим шведским естествоиспытателем К. Линнеем.

Как мастер-профессионал Фаренгейт в 1710—1712 годах начал изготовлять прецизионную (очень точную) аппаратуру для физических, химических и астрономических исследований — термометры, барометры, ареометры, оптические инструменты, устройства точной механики. Спрос на изделия Фаренгейта возрастал, и в 1717 году он основал в Амстердаме специальную фирму по производству точных научных приборов, и в частности ртутных термометров различного назначения, которые были вне конкуренции. Небезынтересно, что в 1721 году комплект фаренгейтовских термометров заказал Петр I. В 1724 году Фаренгейт был избран членом Лондонского Королевского общества, президентом которого в это время был И. Ньютон.

Помимо изготовления приборов, Фаренгейт много работал и как физик-экспериментатор. Он обнаружил зависимость температуры кипения жидкостей от давления, открыл явление переохлаждения воды, исследовал температурные зависимости плотности и коэффициента линейного теплового расширения различных материалов. В течение ряда лет он читал амстердамским студентам лекции по экспериментальной физике.

Конечно, Фаренгейта нельзя считать изобретателем термометра, да и он сам никогда не скрывал, сколь многим

он обязан Рёмеру и другим своим предшественникам. Но неоспоримой заслугой Фаренгейта является введение в широкое употребление стандартного термометра, чем было положено начало научной термометрии, впервые позволившей осознать важнейшее различие между понятиями теплоты и температуры (в отношении которых ранее царила полная неразбериха).

Б. Е. Явелов

kvant.mccme.ru

Задачник «Кванта»

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 декабря 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10—86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1006, М1007» или «Ф1018». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию, имя и домашний адрес просим писать печатными буквами.

Задачи Ф1018—Ф1022 предлагались на заключительном этапе XX Всесоюзной олимпиады по физике.

Задачи

М1006—М1010; Ф1018—Ф1022

М1006. Через две вершины треугольника проведены две прямые, разбивающие его на три треугольника и четырехугольник.

а) Могут ли площади всех четырех частей быть равными?

б) Какие три из этих частей могут иметь равные площади? Во сколько раз отличается от них площадь четвертой части?

Г. А. Гальперин, А. П. Савин

М1007. Докажите, что треугольники с длинами сторон a, b, c и a_1, b_1, c_1 подобны, если и только если

$$\sqrt{aa_1}+\sqrt{bb_1}+\sqrt{cc_1}=\sqrt{(a_1+b_1+c_1)(a+b+c)}.$$

В. П. Чичин

М1008. Лестница состоит из $2n+1$ ступеней. На n нижних ступенях лежит по одному камню. Двое по очереди таскают камни. Первый может переложить любой камень вверх на первую свободную ступеньку, а второй — переложить камень на одну ступеньку вниз, если она свободна. Цель первого — положить камень на верхнюю ступеньку. Может ли второй ему помешать?

С. Л. Елисеев

М1009. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает прямые BC и CD в точках K и L соответственно. Докажите, что центр окружности, проведенной через точки C, K и L, лежит на окружности, проведенной через точки B, C и D.

И. Ф. Шарыгин

М1010. Последовательность r_1, r_2, r_3, ... определяется условиями

$$r_1=2,\ r_{n+1}=r_1r_2\ldots r_n+1,$$

так что $r_2=3$, $r_3=7$, $r_4=43$, ...

а) Докажите, что при любом n

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_n}<1.$$

б)* Пусть n натуральных чисел таковы, что сумма их обратных величин меньше 1. Докажите, что эта сумма не больше

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_n}.$$

Известные нам доказательства опираются на такую лемму, которую мы предлагаем доказать читателям.

в)* Среди всех наборов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ из n вещественных чисел, удовлетворяющих условиям:

$$\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\ldots\geqslant\alpha_n\geqslant0,\quad \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=1,$$

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\leqslant\alpha_{k+1}+\alpha_{k+2}+\ldots+\alpha_n\ (k=1, 2, \ldots, n-1),$$

выбран тот, для которого значение a_n наименьшее. Тогда

$$a_k = 1/r_k \text{ для } k = 1, 2, \ldots, n-1, \; a_n = 1/(r_n - 1).$$

О. Т. Ижболдин, Л. Д. Курляндчик

Ф1018. Катер, привязанный у берега большого озера (береговая линия — прямая), неожиданно отвязался, и ветер погнал его с постоянной скоростью $v_0 = 2{,}5$ км/ч под углом $\alpha = 15°$ к берегу. Сможете ли вы догнать катер, если ваша скорость на берегу $v_1 = 4$ км/ч, в воде — $v_2 = 2$ км/ч? При какой скорости катера это вообще возможно?

С. С. Кротов

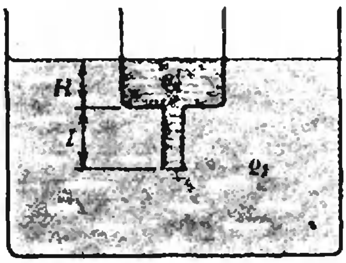


Рис. 1.

Ф1019. В большой сосуд с жидкостью, плотность которой ρ_1, опущен маленький цилиндрический сосуд с площадью основания S, в дно которого вставлена трубочка длиной l (рис. 1); стенки сосудов жестко скреплены между собой. В маленький сосуд наливают подкрашенную жидкость плотностью ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$) до высоты H так, что уровни жидкостей в большом и малом сосудах совпадают. В некоторый момент времени отверстие в трубочке открывают. Тяжелая жидкость начинает вытекать в большой сосуд, через некоторое время легкая жидкость из большого сосуда втекает в маленький сосуд; затем процесс повторяется. Какая масса тяжелой жидкости вытечет из маленького сосуда в первый раз? Какая масса тяжелой жидкости будет вытекать каждый раз в дальнейшем? Какая масса легкой жидкости будет втекать каждый раз в маленький сосуд? Считать, что жидкости не смешиваются; поверхностным натяжением пренебречь.

В. Е. Скороваров

Ф1020. Подвижный поршень делит цилиндр на две одинаковые части объемом $V_0 = 10^{-3}$ м³. В одной части находится сухой воздух, в другой — водяной пар и $m = 4$ г воды. При медленном нагревании цилиндра поршень приходит в движение. После смещения поршня на 1/4 длины цилиндра движение прекратилось. Какая масса водяных паров находилась в сосуде до нагревания? Какова масса воздуха, находящегося в сосуде, и его начальная температура? При какой температуре поршень перестал двигаться?

Зависимость давления насыщенных паров воды от температуры приведена в таблице.

Таблица

t, °C	$p_н \cdot 10^{-5}$, Па
100	1
120	2
133	3
152	5
160	10

А. И. Буздин

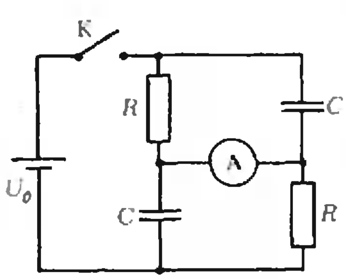


Рис. 2.

Ф1021. В цепи, показанной на рисунке 2, $R = 100$ Ом, $C = 10$ мкФ, $U_0 = 10$ В, внутреннее сопротивление батареи и сопротивление амперметра пренебрежимо малы. Ключ К периодически замыкают на время $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-4}$ с и размыкают на время $\tau_2 = 20 \cdot 10^{-5}$ с. При таком режиме переключений стрелка амперметра практически не дрожит. Какой ток показывает амперметр?

А. Р. Зильберман

Ф1022. «Черный ящик» содержит катушку, резистор и конденсатор и имеет три вывода. При его исследовании были получены следующие результаты.

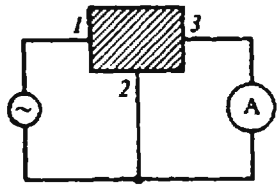


Рис. 3.

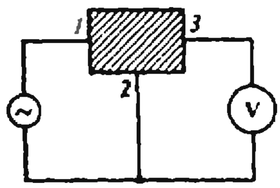


Рис. 4.

В схеме, показанной на рисунке 3, амперметр показал $I_1=0{,}1$ А при частоте генератора $\nu_1=1000$ Гц; ток через амперметр отставал по фазе от входного напряжения на $\Delta\varphi_1=\pi/6$. Когда частоту генератора уменьшили в 100 раз, ток возрос менее чем в 2 раза. Частоту генератора вернули к прежнему значению и вместо амперметра в цепь включили вольтметр (рис. 4). Вольтметр показал $U_1=20$ В, а сдвиг фаз между напряжением на вольтметре ($u_в$) и входным напряжением ($u_{вх}$) опять составил $\Delta\varphi_1=\pi/6$.

Найдите по этим данным параметры элементов «черного ящика». Во сколько раз нужно изменить частоту генератора, чтобы в схеме с вольтметром (см. рис. 4) сдвиг фаз между $u_в$ и $u_{вх}$ составил $\Delta\varphi_2=\pi/2$?

Измерительные приборы считать идеальными. Внутреннее сопротивление генератора пренебрежимо мало.

А. Р. Зильберман

Problems

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems ae marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than December 15th, 1986, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the

M1006—M1010; P1018—P1022

M1006. Two lines, drawn through two vertices of a triangle, divide it into two triangles and a quadrilateral.

a) Can the areas of the four parts all be equal?

b) What three of these parts can have equal areas? How much will the area of the fourth part differ from them?

G. A. Galperin, A. P. Savin

M1007. Prove that two triangles with sides a, b, c and a_1, b_1, c_1 are similar if and only if

$$\sqrt{aa_1}+\sqrt{bb_1}+\sqrt{cc_1}=\sqrt{(a_1+b_1+c_1)(a+b+c)}.$$

V. P. Chichin

M1008. There are $2n+1$ steps in a staircase. There is one rock on each of the n lowest steps. Two persons take turns carrying rocks. The first may place any rock on the lowest free step, the second may move a rock one step down on a free step. The aim of the first is to put a rock on the top step. Can the second stop him?

S. L. Eliseev

M1009. The bissector of angle A of parallelogram $ABCD$ intersects lines BC and CD at points K and L respectively. Prove that the centre of the circle passing through points C, K and L lies on the circle passing through points B, C and D.

I. F. Sharygin

M1010. The sequence $r_1, r_2, r_3, \ldots$ is determined by the conditions

$$r_1=2,\ r_{n+1}=r_1r_2\ldots r_n+1,$$

so that $r_2=3$, $r_3=7$, $r_4=43, \ldots$

a) Prove that for any n

$$1/r_1+1/r_2+\ldots+1/r_n<1.$$

b) Suppose that the sum of the inverses of n natural numbers is less than 1. Prove that this sum is then no greater than

$$1/r_1+1/r_2+\ldots+1/r_n.$$

The proofs that we have are all based on the following lemma, which we propose to our readers for proof.

c)* Among all the sequences $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ of n real numbers

kvant.mccme.ru

Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

satisfying the conditions

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n \geqslant 0,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1,$$
$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k \leqslant \alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \ldots + \alpha_n \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

choose the one for which the value of α_n is minimal. Then

$$\alpha_k = 1/r_k \text{ for } k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad \alpha_n = 1/(r_n - 1).$$

O. T. Ijboldin, L. D. Kurlyanchik

P1018. A motorboat, tied to the shore of a large lake (whose shoreline is straight), suddenly comes loose, and is chased by the wind with constant velocity $v_0 = 2{,}5$ km/h, forming an angle of $\alpha = 15°$ with the shore. Will you be able to catch the boat if your velocity on shore is 4 km/h and 2 km/h in the water? For what velocities of the motorboat is this possible?

S. S. Krotov

P1019. A small cylindrical vessel of base area S with a thin tube of length l in its bottom is placed in a large vessel filled with a liquid of density ρ_1 (see figure Рис. 1); the walls of the vessels are rigidly fixed together. The little vessel is filled with a tainted liquid of density ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$) to the level H, so that the level of liquids in the two vessels is the same. At some moment the tube is opened. The heavy liquid begins to flow out into the big vessel, after a while the light liquid starts flowing into the small vessel from the big one; the process repeats itself. What mass of heavy liquid will flow out of the little vessel the first time? What mass of heavy liquid will flow out each of the subsequent times? What mass of light liquid will flow into the small vessel each time? It may be assumed that the liquids don't mix and surface tension is negligible.

V. E. Skorovarov

P1020. A mobile piston divides the cylinder into two identical parts of volume $V_0 = 10^{-3}$ m^3. One part contains dry air, the other water vapors and $m = 4$ g of water. When the cylinder is heated slowly the piston begins to move. After the piston had moved by one fourth of the length of the cylinder, it stopped. What was the mass of air contained in the cylinder and its initial temperature? At what temperature did the piston stop moving? The dependence of the pressure of saturated vapors on temperature is given in the table on p. 29.

A. I. Buzdin

P1021. In the circuit shown on figure Рис. 2, $R = 100$ Ohms, $C = 10$ mkF, $U_0 = 10$V, the inner resistance of the source and the resistance of the ammeter are negligible. The switch K is periodically turned on for $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ s and switched off for $\tau_2 = 20 \cdot 10^{-3}$ s. In this working rithm the ammeter indicator is practically motionless. What is the current in the ammeter?

A. R. Zilberman

P1022. A "black box" contains a coil, a resistor and a capacitor, and has three outputs. The following results were obtained in its study. For the scheme shown on figure Рис. 3, the ammeter reading was $I_1 = 0.1$ A with generator oscillation frequency $\nu_1 = 1000$ Hz; the current lagged in its phase from the input voltage by $\Delta\varphi_1 = \pi/6$. When the generator's frequency was decreased 100-fold, the current increase was less than 2-fold. The frequency of the generator was then returned to the previous value and a voltmeter put in place of the ammeter into the circuit (Рис. 4). The voltmeter showed $U_1 = 20$ V, and the phase shift between the voltage on the voltmeter u_v and the input voltage u_{in} again was $\Delta\varphi_1 = \pi/6$. Use this data to find the parameters of the "black box". How must the generator frequency be changed in order to obtain a phase shift of $\Delta\varphi_2 = \pi/2$ between u_v and u_{in} in the voltmeter circuit? The measuring devices are assumed ideal, the inner resistance of the generator — negligible.

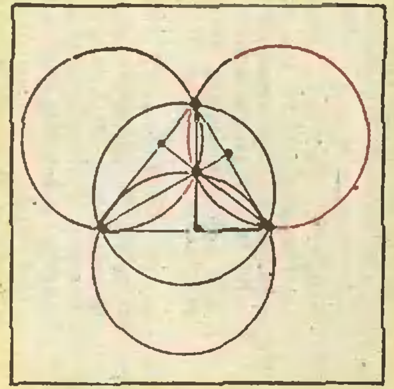
A. R. Zilberman

kvant.mccme.ru

КАЛЕЙДОСКОП

Замечательные точки и линии

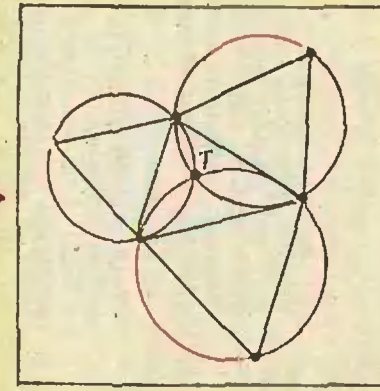
В курсе геометрии вы знакомитесь с некоторыми замечательными точками в треугольнике: с точками пересечения высот, медиан, биссектрис и серединных перпендикуляров к сторонам. Эти точки замечательны не только тем, что в них пересекаются сразу три рассматриваемые прямые. О других свойствах этих точек, а также о других замечательных линиях и точках мы расскажем в нашем «Калейдоскопе».



Все знают, что высоты треугольника пересекаются в одной точке — *ортоцентре* треугольника. Но мало кто знает, что если окружность, описанную вокруг треугольника, зеркально отразить относительно его сторон, то полученные три окружности пересекутся в ортоцентре этого треугольника.

Эванжелиста Торричелли известен не только как физик, но и как математик. Его именем помимо «торричеллевой пустоты» названа одна из точек в треугольнике. Получается она так. Сначала на сторонах данного треугольника строятся равносторонние треугольники, потом вокруг каждого из них описывается окружность

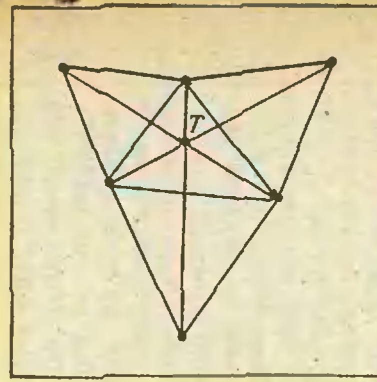
Э. Торричелли (1608—1647)

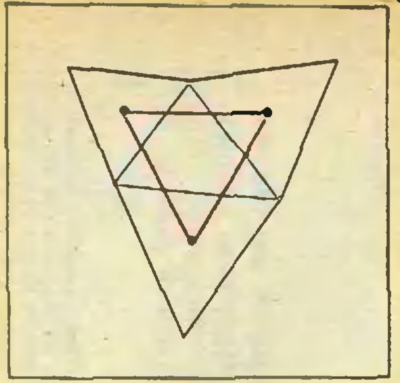


(она называется *окружностью Торричелли*). Оказывается, *окружности* Торричелли пересекаются в одной точке. Эту точку и назвали *точкой Торричелли*.

П. Ферма (1601—1665)

Пьер Ферма обнаружил, что если удаленные вершины равносторонних треугольников, построенных на сторонах произвольного треугольника, соединить с противоположными им вершинами исходного треугольника, то эти три прямые пересекаются в одной точке — точке Торричелли, поэтому ее называют и *точкой Ферма*.

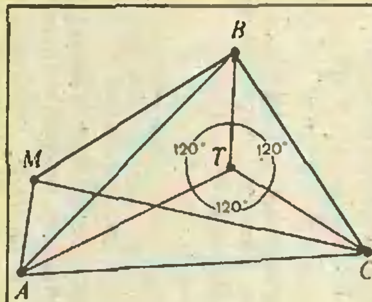




Любопытно, что центры равносторонних треугольников, рассмотренных при построении точки Торричелли, сами являются вершинами равностороннего треугольника. Это утверждение приписывают Наполеону.

Наполеон Бонапарт

(1769—1821)



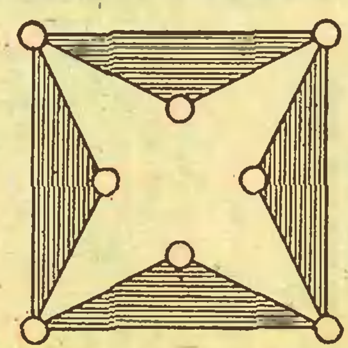
$AT+BT+CT<$
$<AM+BM+CM$

Довольно очевидно, что отрезки, соединяющие точку Торричелли с вершинами остроугольного треугольника, образуют друг с другом углы в 120°. Но удивительно, что сумма длин этих отрезков, то есть сумма расстояний точки Торричелли от вершин треугольника, меньше, чем такая же сумма от любой другой точки плоскости.

Головоломки

Треугольники и квадрат

Разместите в кружочках рисунка числа от 1 до 8 так, чтобы сумма чисел в вершинах каждого из заштрихованных треугольников равнялась сумме чисел в вершинах квадрата.



Цифры на кубике

На гранях кубика написаны шесть различных цифр. Сумма цифр на противоположных гранях одна и та же для каждой пары параллельных граней. Каковы остальные три цифры, если три видны на рисунке?

kvant.mccme.ru

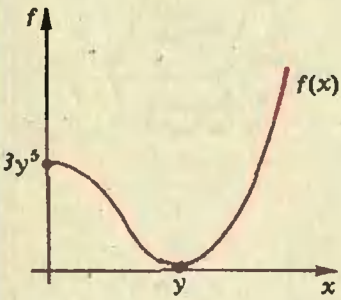
kvant.mccme.ru

Решения задач

M986—M990; Ф998—Ф1002

M986. *Докажите, что для любых положительных чисел a и b выполняется неравенство*

$$2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}\geqslant 5\sqrt[5]{ab}.$$



Положим $a=x^{10}$, $b=y^{15}$ и рассмотрим функцию

$$f(x)=2x^5+3y^5-5x^2y^3,\ x\geqslant 0$$

(при фиксированном $y>0$). Надо доказать, что $f(x)\geqslant 0$. Производная

$$f'(x)=10x^4-10xy^3=10x(x^3-y^3)$$

обращается в 0 при $x=y$, отрицательна при $0<x<y$ и положительна при $x>y$. Таким образом (см. рисунок), при $x=y$ функция $f(x)$ принимает минимальное значение, и при всех $x>0$

$$f(x)\geqslant f(y)=2y^5+3y^5-5y^5=0.$$

Другие доказательства, не использующие математического анализа, можно получить, разложив $f(x)$ на множители:

$$f(x)=(x-y)^2(2x^3+4x^2y+6xy^2+3y^3)$$

или воспользовавшись неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим для пяти чисел x^5, x^5, y^5, y^5, y^5:

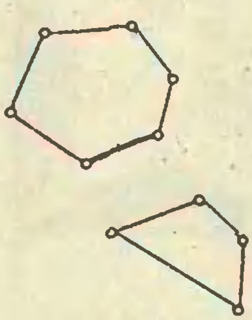
$$\frac{2x^5+3y^5}{5}\geqslant\sqrt[5]{x^{5\cdot2}y^{5\cdot3}}=x^2y^3.$$

(Подробное обсуждение этой задачи содержится в новом издании книги «Заочные математические олимпиады», М.: — «Наука», 1986, задача 4-16.)

Н. Б. Васильев

◆

M987. *В турнире участвуют $2m$ команд. В первом туре встретились некоторые m пар команд, во втором — другие m пар команд. Докажите, что после этого можно выбрать m команд, никакие две из которых еще не играли между собой.*



Изобразим наши $2m$ команд точками на плоскости. Пары команд, встречавшихся в первом туре, соединим красными отрезками, во втором — голубыми. Тогда из каждой точки будет выходить один красный и один голубой отрезок. Любая команда принадлежит некоторому «циклу» — замкнутой ломаной, состоящей из чередующихся голубых и красных отрезков, так что все $2m$ точек и $2m$ соединяющих их отрезков образуют один или несколько таких циклов (см. рисунок). Поскольку цвета чередуются, число команд в каждом цикле четно. Выбрав в каждом цикле половину команд, стоящих через одну, получим набор m команд, которые еще не играли друг с другом. Из решения видно, что такой набор можно выбрать 2^c разными способами, где c — число циклов, и что более чем m команд, не игравших друг с другом, выбрать нельзя*).

М. Бона

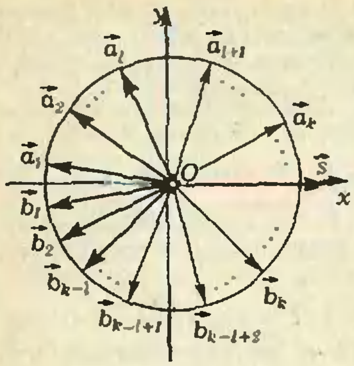
◆

M988. *Из точки O плоскости проведено n векторов единичной длины. Докажите, что если для некоторого $k<n/2$ по обе стороны от каждой прямой, проходящей через O, лежит не менее k векторов, то длина суммы всех n векторов не больше $n-2k$.*

Пусть $\vec{s}$ — сумма данных векторов; можно считать $\vec{s}\neq\vec{0}$, иначе все очевидно. Направим положительную полуось Ox системы координат Oxy вдоль вектора $\vec{s}$. Двигаясь по часовой стрелке от

---

*) Вот еще одна задача с похожей идеей решения: доказать, что если каждый из m участников кружка решил две из m предложенных задач, то можно организовать разбор задач так, чтобы каждый рассказал одну решенную им задачу (см. задачу 5-42 в книге, упомянутой в решении M986).



отрицательной полуоси Ox, занумеруем данные векторы, лежащие в верхней полуплоскости $y \geqslant 0$: $\vec a_1, \vec a_2, \ldots$; аналогично, двигаясь против часовой стрелки, занумеруем остальные векторы (в нижней полуплоскости): $\vec b_1, \vec b_2, \ldots$ (см. рисунок). По условию по крайней мере k векторов лежат в левой полуплоскости $x \leqslant 0$; пусть это будут $\vec a_1, \vec a_2, \ldots, \vec a_l$ и $\vec b_1, \vec b_2, \ldots, \vec b_{k-l}, \ldots$ Условие «по обе стороны от каждой прямой лежит не менее k векторов» эквивалентно тому, что *каждый из n векторов вместе с k следующими за ним против часовой стрелки (или по часовой стрелке) лежат в одной полуплоскости.* Отсюда следует, что k попарных сумм векторов: $\vec a_l + \vec b_{k-l+1}$ (то есть сумма вектора a_l и k-го от него против часовой стрелки, $\vec a_{l-1} + \vec b_{k-l+2}, \ldots, \vec a_1 + \vec b_k$, а также $\vec b_{k-l} + \vec a_{l+1}, \vec b_{k-1-l} + \vec a_{l+2}, \ldots, \vec b_1 + \vec a_k$ — все дают отрицательные проекции на ось Ox. (Действительно, например, сумма $\vec v = \vec a_1 + \vec b_k$ направлена по биссектрисе угла, образованного векторами $\vec a_1$ и $\vec b_k$, а отрицательная полуось Ox лежит внутри этого угла *и потому составляет острый угол с $\vec v$.*) Проекции каждого из остальных $n-2k$ векторов не больше 1. Поэтому проекция суммы всех векторов, а она равна длине $\vec s$, не больше $n-2k$.

Заметим, что в условии задачи вектор, лежащий на прямой, можно считать расположенным по любую сторону от нее.

Интересно было бы получить утверждение, аналогичное нашей задаче, для векторов в пространстве.

П. А. Калугин, В. В. Прасолов

◆

М989. *Найдите все такие натуральные числа a, для которых число $a-1$ является суммой а) двух; б)* трех делителей числа a (необязательно различных; в число делителей a включается 1); в)* докажите, что для любого n существует лишь конечное число натуральных a таких, что $a-1$ является суммой n делителей числа a.*

Пусть $d_1, d_2, \ldots, d_n$ — такие делители числа a, что

$$a-1 = \frac{a}{d_1} + \frac{a}{d_2} + \ldots + \frac{a}{d_n}.$$

Тогда

$$1 - \frac{1}{a} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_n} < 1. \qquad (1)$$

Идея решения задачи заключается в том, чтобы для каждого $n = 2, 3, \ldots$ в множестве X_n чисел, представимых суммой n чисел, обратных натуральным, указать наибольшее число μ_n, строго меньшее 1. Тогда из (1) будет следовать оценка для a:

$$1 - \frac{1}{a} \leqslant \mu_n \Rightarrow a \leqslant \frac{1}{1-\mu_n}. \qquad (2)$$

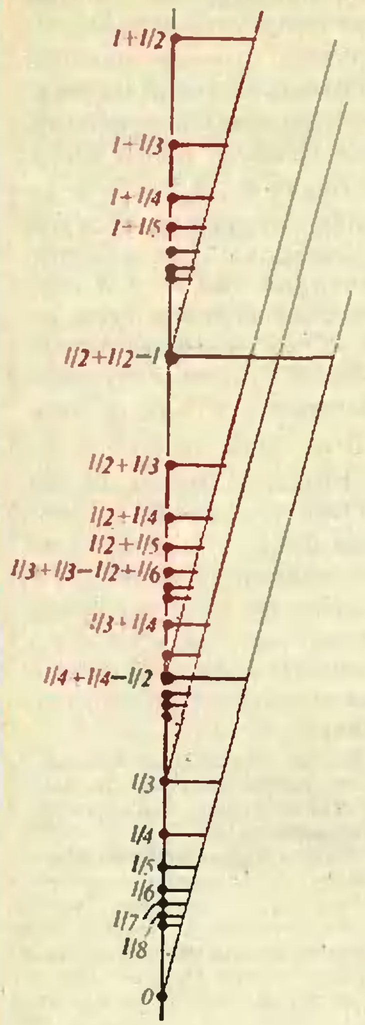
Заметим, что поскольку множество X_n бесконечно, даже существование такого μ_n для каждого n нуждается в доказательстве: наглядное объяснение этого доказательства, которое мы приведем в пункте в), состоит в том, что X_n *получается* прибавлением к каждому числу из X_{n-1} всех чисел вида $1/k$ ($k = 1, 2, \ldots$) и потому точки из X_n в бесконечном количестве накапливаются лишь справа от каждой точки из X_{n-1} и не могут скопиться слева от какой-либо точки (в частности, от точки 1).

а) Ответ: $a = 3, 4, 6$. Если

$$x = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} < 1, \quad k_1 \leqslant k_2,$$

то $k_1 \geqslant 2$, $k_2 \geqslant 3$ (иначе $x \geqslant 1/2 + 1/2 = 1$), поэтому $x \leqslant \mu_2 = 1/2 + 1/3 = 5/6$ и из (2) следует, что $a \leqslant 6$. Перебирая все такие a, видим, что число $a-1$

kvant.mccme.ru



можно представить в виде суммы двух делителей a лишь при $a=3$, 4 и 6 (в этих случаях $a-1$ равно $2=1+1$, $3=2+1$, $5=3+2$; представить 4 в виде суммы двух делителей $a=5$ нельзя).

б) Пусть

$$x=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}<1,\quad k_1\leqslant k_2\leqslant k_3.$$

Если $k_1\geqslant 3$, то $x\leqslant 1/3+1/3+1/4=11/12$; если $k_1=2$, $k_2\geqslant 4$, то $x\leqslant 1/2+1/4+1/5=19/20$; если $k_1=2$, $k_2=3$, то $k_3\geqslant 7$ и

$$x\leqslant 1/2+1/3+1/7=41/42.$$

Таким образом, $\mu_3=41/42$ и из (2) следует, что $a\leqslant 42$. Перебирая эти a, можно выбрать те, для которых $a-1$ представляется в виде суммы трех делителей $a-1$. Ответ: $a=4$, 6, 8, 10, 12, 18, 20, 24 и 42.

в) Докажем, что для любого $c>0$ в множестве чисел, принадлежащих X_n и меньших c, есть наибольшее число $\mu_n(c)$. (Для решения задачи достаточно доказать это для $c=1$, но более общее утверждение легче доказать индукцией по n.) Напомним, что X_n — бесконечное множество чисел вида

$$x=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_n}, \tag{3}$$

где k_1, k_2, ..., k_n — натуральные числа.

Для $n=1$ наше утверждение очевидно: $\mu_n(c)$ — это наибольшее число вида $1/k$, меньшее c, то есть $1/[c+1]$ (квадратные скобки означают целую часть числа). Пусть наше утверждение доказано для X_{n-1}; докажем его для X_n.

Выберем натуральное k такое, что $n/k<c$ (можно взять $k=[n/c]+1$). Тогда среди чисел x из X_n, меньших c, имеется число n/k (сумма n дробей $1/k$), а в представлении (3) любого числа x, такого, что $n/k<x<c$, хоть одна из дробей $1/k_i$ больше $1/k$, то есть $k_i\leqslant k-1$. При этом $x-1/k_i$ принадлежит X_{n-1} и наибольшее из таких x — а это и есть $\mu_n(c)$ — будет равно наибольшему из конечного набора чисел

$$\frac{n}{k},\ \mu_n\left(c-\frac{1}{k-1}\right)+\frac{1}{k-1},$$

$$\mu_n\left(c-\frac{1}{k-2}\right)+\frac{1}{k-2},\ \ldots,\ \mu_n\left(c-\frac{1}{l}\right)+\frac{1}{l}$$

(где l — наименьшее натуральное число, для которого $c-1/l>0$, то есть $l=[1/c]+1$).

Оказывается, можно для каждого $n=3$, 4,... указать наибольшее число a_n, для которого a_n-1 представляется в виде суммы n делителей a_n: довольно давно была сформулирована гипотеза о том, что μ_n (1) — ближайшее слева к 1 число вида (3) — равно сумме первых n дробей ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1807}+\ldots,$$

в котором знаменатель каждой дроби на 1 больше произведения знаменателей всех предыдущих; из нее вытекает, что a_n — это произведение знаменателей первых n дробей (то есть $a_{n+1}=a_n^2-a_n$).

Н. Б. Васильев

M990. *В пространстве заданы три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, у которых эти три прямые:*
а) проходят по ребрам,
б) проходят по ребрам или диагоналям граней,
в) содержат 6 вершин параллелепипеда?

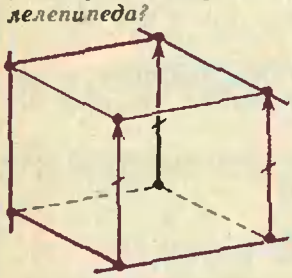


Рис. 1.

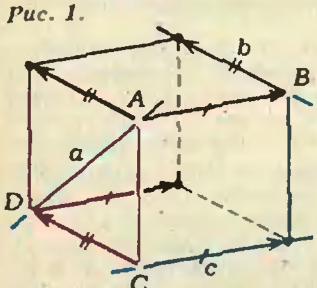


Рис. 2.

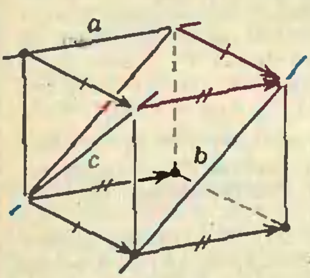


Рис. 3.

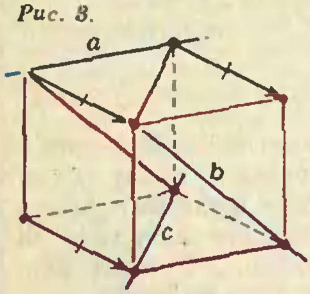


Рис. 4.

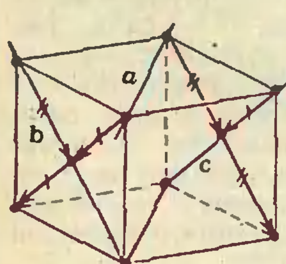


Рис. 5.

Заметим сначала, что *для любых трех попарно скрещивающихся прямых a, b и c, не параллельных одной плоскости, существует единственный отрезок с концами на a и b, параллельный c.*

Действительно, искомый отрезок должен лежать в плоскости α, содержащей a и параллельной c. Очевидно, такая плоскость существует (ее можно провести через a и любую прямую, пересекающую a и параллельную c), единственна и не параллельна b. Точка пересечения α и b — один из концов нашего отрезка. Проведя через него прямую, параллельную c, до пересечения с a, получим второй конец.

Такого рода отрезок нам придется проводить много раз; для краткости будем называть его *c-мостиком* между a и b или просто *c-мостиком*. На рисунках 1—9 данные прямые обозначены синим цветом, мостики — красным.

а) Ответ: 1. Ясно, что 3 мостика, определяемые данными прямыми, являются ребрами искомого параллелепипеда (рис. 1). Построив их, мы получим 6 вершин, после чего однозначно восстанавливаются и 2 последние вершины.

б) Ответ: 19. Перечислим сначала всевозможные наборы из трех попарно скрещивающихся ребер или диагоналей граней параллелепипеда. Они могут содержать:

1) 3 ребра (см. задачу а));

2) диагональ грани a, ребро b, параллельное этой грани, и ребро c, ее пересекающее (рис. 2);

3) ребро a, диагональ b грани, параллельной a, и диагональ c грани, пересекающей a (рис. 3);

4) ребро a и диагонали b и c двух граней, параллельных a (рис. 4);

5) 3 диагонали a, b и c граней, из которых 2 (скажем, b и c) лежат в параллельных гранях (рис. 5).

В каждом из этих случаев параллелепипед можно однозначно восстановить, если заданы прямые, содержащие отрезки a, b и c, и указано, какой именно прямой принадлежит каждый из этих отрезков; при этом в качестве таких прямых можно брать любые 3 прямые, удовлетворяющие условию задачи.

Как построить параллелепипед с помощью наших «мостиков», объясняют рисунки 2—5. Разберем подробнее только один случай, скажем 2). Построив c-мостик AB между a и b и b-мостик CD между c и a, получим 4 вершины параллелепипеда — концы A и D диагонали грани a и по одному концу — B и C — ребер b и c. Для построения остальных вершин достаточно отложить вектор $\vec{AB}$ от точек C и D и вектор $\vec{CD}$ от точек A и B. Построения в случаях 3) и 4) аналогичны, а в случае 5) концы наших мостиков дают 4 вершины и центры двух противоположных граней параллелепипеда, что позволяет легко найти остальные вершины.

В каждом из случаев 2)—5) надо еще указать, какой из отрезков a, b, c будет лежать на каждой из трех данных прямых. Такое «распределение ролей» можно осуществить 6 разными способами, причем, как видно из построения, в случаях 2) и 3) это дает по 6 разных параллелепипедов, а в случаях 4) и 5) — по 3 (поскольку построения не меняются при перестановке b и c). Суммируя число параллелепипедов по всем случаям, получим $1+6+6+3+3=19$.

kvant.mccme.ru

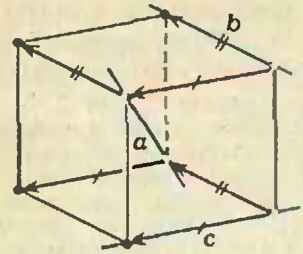


Рис. 6.

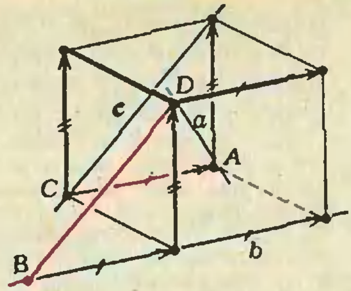


Рис. 7.

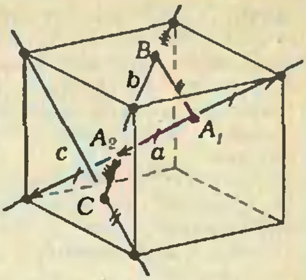


Рис. 8.

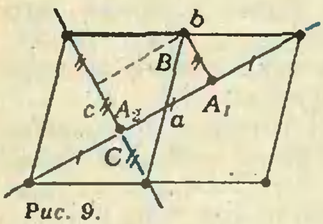


Рис. 9.

в) Ответ: 31. К вариантам, рассмотренным при решении задачи б), добавляются те, при которых

одна из прямых содержит диагональ a параллелепипеда, а 2 другие —

6) 2 ребра b и c (рис. 6),

7) ребро b и диагональ грани c (рис. 7),

8) 2 диагонали граней b и c (рис. 8).

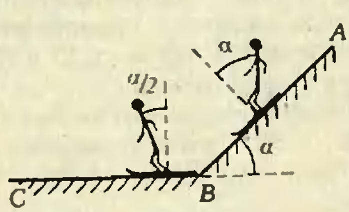
Построим b- и c-мостики. В случае 6) их концы являются вершинами параллелепипеда, и дальнейшее построение ясно из рисунка 6. В случае 7) b-мостик AC между a и c является ребром параллелепипеда; если BD — это c-мостик между b и a, то точка D (как и точки A, C) — вершина параллелепипеда, еще 2 вершины — это концы векторов, равных $\vec{CA}$, отложенных от D и B, остальные 3 вершины строятся очевидным образом (рис. 7). Несколько сложнее построение в последнем случае 8). Пусть A_1B и A_2C — c- и b-мостики между a и b, или соответственно a и c (рис. 8). Тогда точки A_1 и A_2 делят диагональ a параллелепипеда на 3 равные части, а точки B и C делят отрезки b и c в отношении $2:1$, причем отрезки A_1B и A_2C в 3 раза короче диагоналей c и b соответственно. (Эти утверждения становятся очевидными, если взглянуть на проекцию параллелепипеда вдоль диагонали b — рис. 9 — и учесть, что при параллельной проекции отношения длин параллельных отрезков сохраняются.) Теперь, отложив от A_1 векторы $\vec{A_2A_1}$ и $2\vec{A_1A_2}$, мы найдем концы отрезка a; отложив от C векторы $\vec{BA_1}$ и $2\vec{A_1B}$, найдем концы отрезка c и, аналогично, концы b, после чего остается построить по 6 вершинам 2 остальные.

Поскольку в случае 7) имеется 6 способов «распределить роли» между данными прямыми, а в случаях 6) и 8) — 3, общее число параллелепипедов равно $19+3+6+3=31$.

В. Н. Дубровский

◆

Ф998. *Горнолыжник спускается с высокой горы с установившейся скоростью v. Гора образует угол α с горизонтом и плавно переходит в горизонтальный участок. Как должен наклоняться лыжник, чтобы не упасть в момент перехода? Считать, что переход происходит очень быстро. Масса лыжника равна M. Сопротивление воздуха не учитывать.*

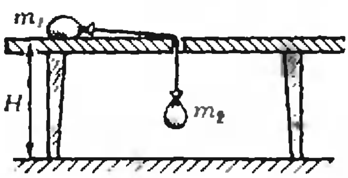


Так как переход плавный, кинетическая энергия лыжника постоянна и его скорость v_1 сразу после перехода на горизонтальный участок равна (по модулю) v. Изменение импульса лыжника за время τ перехода равно $\Delta\vec{p}=M(\vec{v}_1-\vec{v})$ и направлено по биссектрисе угла ABC (см. рисунок).

Из закона изменения импульса, учитывая малое значение τ, имеем: $\Delta\vec{p}=\vec{f}\tau$, где $\vec{f}$ — сила, действующая на тело лыжника со стороны лыж (она также направлена по биссектрисе). Для равновесия лыжника необходимо, чтобы вектор этой силы проходил через центр масс лыжника. Из этого условия находим, что в момент перехода на горизонтальный участок лыжник должен наклониться вперед на угол $\alpha/2$ от того положения, которое он занимал при движении по склону.

А. Н. Семенов

Ф999. *По гладкой горизонтальной поверхности стола скользит мешок массой m_1, связанный жесткой невесомой веревкой с мешком массой m_2. Веревка, соединяющая мешки, проходит через небольшое отверстие в столе (см. рисунок). Длина веревки L, высота стола H, причем $H < L$. На какую высоту поднимется мешок m_2 после удара об пол, если в начальный момент вся веревка лежала на столе и мешки не двигались?*



Скорости v мешков к моменту удара одного из них об пол определяются законом сохранения энергии:

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2=m_2gH. \qquad (1)$$

После удара мешок массой m_1 будет двигаться по столу, пока не натянет веревку. В этот момент мешок m_2, лежавший на полу, рывком ускоряется так, что скорости мешков становятся одинаковыми по величине.

Изменение скоростей мешков по абсолютной величине при этом рывке такое же, как если бы мешок массой m_2 лежал не на полу, а на столе. Действительно, взаимодействие мешков осуществляется через веревку, и сила, прилагаемая к мешку, лежащему на полу, лишь по направлению отличается от той, которая была бы, если бы он лежал на столе.

Таким образом, скорости мешков u после рывка можно найти с помощью закона сохранения импульса:

$$m_1v=(m_1+m_2)u. \qquad (2)$$

Дальнейшее движение мешков вновь «контролируется» законом сохранения энергии, и максимальная высота h подъема мешка m_2 определяется соотношением

$$m_2gh=\frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2. \qquad (3)$$

Исключая v, u из (1), (2), (3), получаем:

$$h=\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2H.$$

Г. Л. Коткин

◆

Ф1000. *Ток I, текущий по контуру, образованному четырьмя ребрами куба (рис. 1), создает в центре куба магнитное поле с индукцией B_0. Найти величину и направление вектора индукции магнитного поля, создаваемого в центре куба током I, текущим по контуру из шести ребер (см. рисунок 2 на с. 40).*

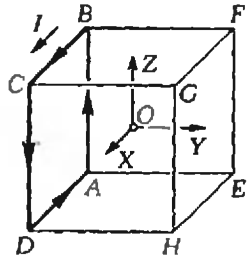


Рис. 1.

Из соображений симметрии следует, что индукция $\vec{B}_0$ поля, создаваемого в центре куба (в точке O) током I, текущим по контуру $ABCDA$ (см. рис. 1), параллельна оси OY. Действительно, при повороте на 90° вокруг OY контур $ABCDA$ переходит сам в себя, следовательно, вектор $\vec{B}_0$ тоже должен перейти сам в себя. По правилу буравчика вектор $\vec{B}_0$ направлен вдоль OY. Таким образом, в проекции на оси OX, OY, OZ

$$\vec{B}_0=(B_x, B_y, B_z)=(0, B_0, 0).$$

Чтобы найти поле $\vec{B}$, создаваемое током, текущим по контуру $ABCGHEA$ (см. рис. 2), воспользуемся принципом суперпозиции. Заметим, что точно такое же распределение тока по ребрам куба получится, если взять три контура: $ABCDA$, $DCGHD$ и $ADHEA$, по каждому из которых течет ток I. Значит, совокупность этих трех контуров создает в центре куба искомое поле $\vec{B}$. В соответствии с принципом суперпозиции, $\vec{B}$ равно векторной сумме трех полей, создаваемых каждым из контуров:

$$\vec{B}=\vec{B}_{ABCDA}+\vec{B}_{DCGHD}+\vec{B}_{ADHEA}=$$
$$=(0, B_0, 0)+(-B_0, 0, 0)+(0, 0, B_0)=(-B_0, B_0, B_0).$$

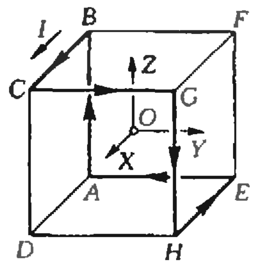


Рис. 2.

Таким образом, вектор $\vec{B}$ направлен вдоль главной диагонали куба ($\overrightarrow{DF}$), а его величина равна $B_0\sqrt{3}$.

Заметим, что индукцию $\vec{B}$ можно найти, просто сложив поля всех шести ребер контура, но это потребовало бы более громоздких вычислений.

М. М. Цыпин

◆

Ф1001. *В однородном электрическом поле находится незаряженный металлический шар. При выключении поля в шаре выделилось количество тепла Q. Какое количество тепла выделилось бы в шаре втрое большего радиуса?*

Очевидно, при помещении незаряженного металлического шара в однородное электрическое поле на поверхности шара появятся наведенные электрические заряды. Они расположатся по его поверхности так, чтобы напряженность результирующего электрического поля внутри шара была равной нулю. Ясно, что поверхностная плотность заряда σ определяется величиной напряженности внешнего электрического поля и геометрией проводника. При заданной геометрии чем больше внешнее электрическое поле, тем больше величина σ в каждой точке поверхности проводника.

При выключении внешнего электрического поля в шаре выделится тепло за счет потенциальной энергии поля, созданного наведенными на шаре зарядами. Эту энергию можно найти как сумму потенциальных энергий всевозможных пар заряженных точек поверхности шара. Разобьем поверхности шаров на подобные малые участки. Энергия взаимодействия пары участков поверхности меньшего шара, находящихся на расстоянии R_{12} друг от друга, равна

$$\Delta W = k\sigma_1\sigma_2\frac{\Delta S_1\cdot\Delta S_2}{R_{12}},$$

где σ_1 и σ_2 — соответствующие плотности заряда, ΔS_1 и ΔS_2 — площади соответствующих участков. Поверхностные плотности заряда на подобных участках большого шара также равны σ_1 и σ_2. (Покажите это самостоятельно, воспользовавшись принципом суперпозиции и условием равенства нулю напряженности поля внутри проводника.) Если радиус этого шара больше в n раз, чем радиус меньшего шара, то энергия пары подобных участков большого шара равна

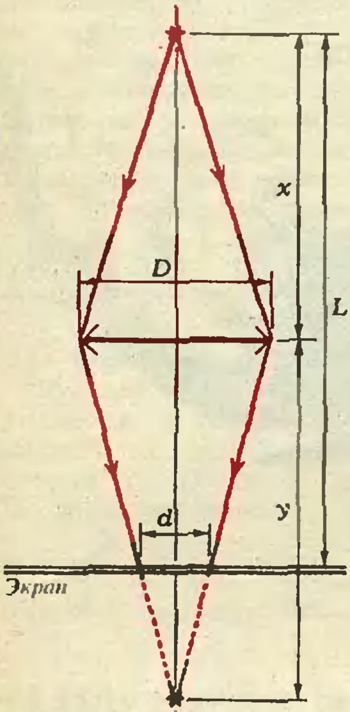
$$\Delta W' = k\sigma_1\sigma_2\frac{\Delta S_1'\cdot\Delta S_2'}{R_{12}'} = k\sigma_1\sigma_2\frac{n^2\cdot\Delta S_1\cdot n^2\cdot\Delta S_2}{nR_{12}} = n^3\cdot\Delta W,$$

где $\Delta S_1'$ и $\Delta S_2'$ — площади соответствующих увеличенных участков, R_{12}' — расстояние между ними.

Таким образом, при увеличении размеров шара в три раза ($n=3$) потенциальная энергия поля наведенных зарядов увеличится в $3^3=27$ раз, и следовательно, во столько же раз возрастет количество тепла, которое выделится при выключении внешнего поля.

С. С. Кротов

Ф1002. *Точечный источник света находится на расстоянии L от экрана. Собирающую линзу с фокусным расстоянием $F>(L/4)$, параллельную экрану, перемещают между источником и экраном. При каком положении линзы диаметр пятна, видимого на экране, будет минимальным?*



Пусть линза сдвигается в сторону так, что расстояние между ней и экраном не изменяется. Тогда остаются неизменными и размеры пятна на экране, ведь пучок лучей за линзой представляет собой конус с вершиной в действительном или мнимом изображении источника и образующими, проходящими через периметр линзы. Так как точки пересечения плоскостей линзы и экрана с высотой конуса при таком сдвиге не изменяются, то (из подобия) не изменяется и размер пятна.

Поэтому мы можем сдвинуть линзу так, чтобы источник находился на ее главной оптической оси. Пусть x — расстояние от источника до линзы. Нетрудно показать, что при условии $F>(L/4)$ получить резкое изображение источника (точку) на экране невозможно — при любом положении линзы на экране будет видно пятно, диаметр d которого зависит от x и минимален при $x=x_0$. В самом деле, изображение источника попадает на экран, если

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{L-x}=\frac{1}{F}, \text{ или } x^2-Lx+FL=0,$$

но данное уравнение не имеет решений — его дискриминант $L^2-4FL=4L((L/4)-F)$ по условию отрицателен.

Если $x<F$, то пучок лучей за линзой расходится, и пятно тем больше, чем дальше линза от экрана. При $F\geqslant L$ имеем $x<F$ для всех возможных x, и в этом случае d минимально при $x_0=L$, то есть когда линза установлена вплотную к экрану. Если же $(L/4)<F<L$, то очевидно, что $x_0>F$ (пучок должен сходиться). В этом случае изображение источника находится за экраном на расстоянии y от линзы таком, что

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{F}, \text{ то есть } y=\frac{xF}{x-F}.$$

Из соображений подобия получаем (см. рисунок):

$$\frac{d}{D}=\frac{y-(L-x)}{y}, \text{ откуда}$$

$$d=D\frac{y-(L-x)}{y}=D\left(1-\frac{(L-x)(x-F)}{xF}\right)=$$

$$=D\left(2\sqrt{\frac{L}{F}}-\frac{L}{F}+\left(\sqrt{\frac{L}{x}}-\sqrt{\frac{x}{F}}\right)^2\right).$$

Это выражение имеет минимальное значение при $x=x_0=\sqrt{LF}$, и

$$d_{\min}=D\sqrt{\frac{L}{F}}\left(2-\sqrt{\frac{L}{F}}\right).$$

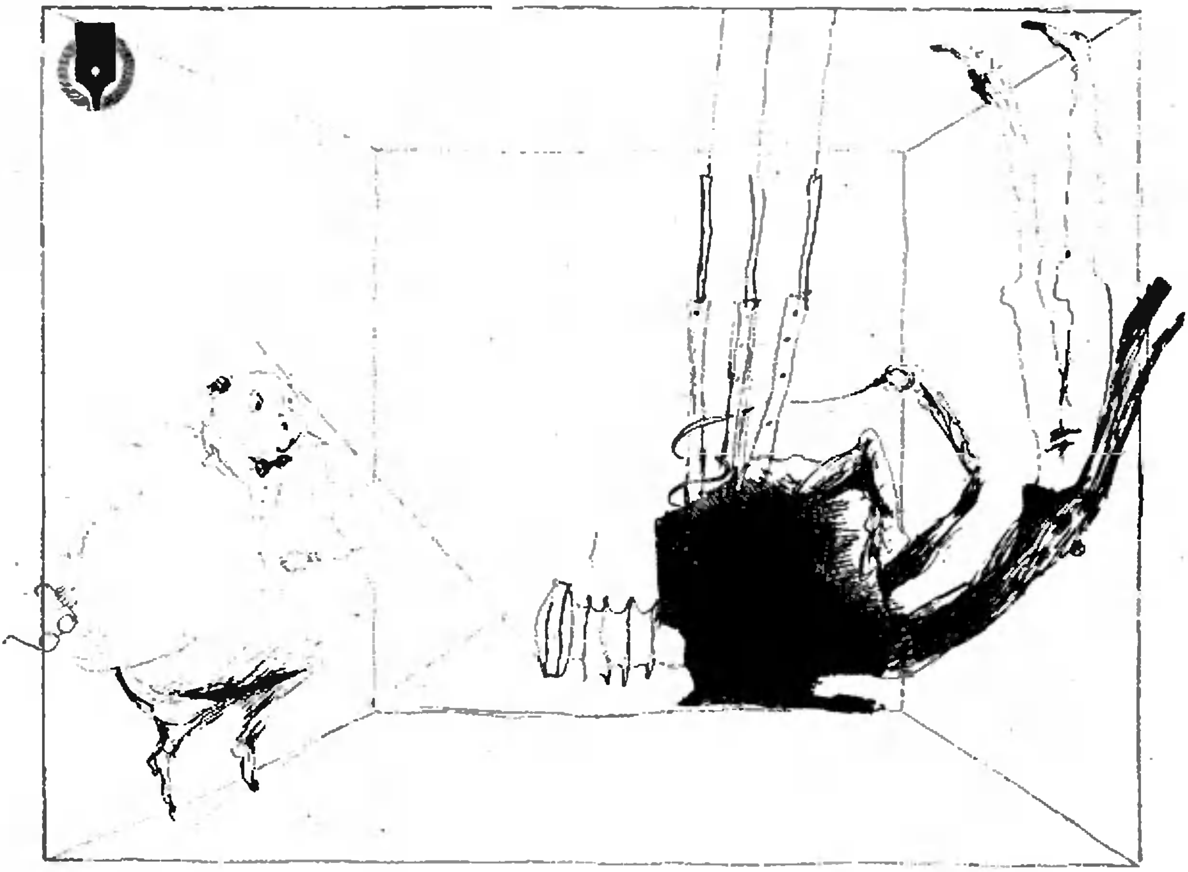
Таким образом, размер пятна минимален
при $x_0=L$, если $F\geqslant L$,
при $x_0=\sqrt{LF}$, если $F<L$.

Д. Ю. Григорьев

Поправка

На четвертой странице обложки в «Кванте» № 6 неправильно указана фамилия автора программы. Автором этой программы является А. А. Левин.

kvant.mccme.ru



Оптические приборы

Л. П. БАКАНИНА

Существует много различных оптических приборов, и каждый из них призван так или иначе «помогать» нашему глазу. Например, телескоп и бинокль позволяют рассматривать весьма удаленные предметы, а лупа и микроскоп служат для рассматривания очень мелких предметов. Фотоаппарат дает возможность запечатлеть изображение на пленке, а проекционный аппарат позволяет получить увеличенное изображение этой пленки на экране, которое может видеть сразу большое число людей. Очки восполняют различные недостатки зрения у людей. О некоторых из перечисленных приборов и пойдет речь в данной статье.

Принципиальное устройство этих приборов очень простое — их оптическая система состоит из одной или двух линз. Сколько и какие именно линзы при этом используются — зависит от назначения конкретного прибора.

Очки

Наш глаз обладает способностью аккомодировать, то есть «настраиваться» на рассматривание различно удаленных предметов. Для нормального глаза область аккомодации лежит в пределах от бесконечно больших расстояний до расстояний порядка 10 см (с возрастом это расстояние увеличивается). При этом в первом случае глазу удается получить на сетчатке отчетливое изображение без каких-либо мышечных усилий.

Человек, страдающий близорукостью, не может сфокусировать на сетчатке изображение удаленных предметов, а человек, страдающий дальнозоркостью, не имеет возможности отчетливо видеть близкие к глазу предметы. Простые очки со сферическими линзами позволяют скоррек-

kvant.mccme.ru

тировать близорукость или дальнозоркость глаза, «приближая» или «удаляя» предметы относительно глаза. Очевидно, что в первом случае используются рассеивающие линзы, а во втором — собирающие.

Принято различать очки «для дали» и очки «для чтения». Первые «переносят» предметы, находящиеся на бесконечно большом расстоянии, на дальнюю границу области аккомодации данного глаза. Вторые «переносят» предметы со стандартного для нормального глаза расстояния наилучшего зрения $d_0=25$ см на расстояние наилучшего зрения близорукого или дальнозоркого глаза.

Задача 1. *Близорукий человек лучше всего различает мелкий шрифт, расположенный на расстоянии $d=15$ см от глаза. Какие очки для чтения нужны этому человеку?*

Считаем, что очки расположены вплотную к глазу, а книгу человек держит на расстоянии наилучшего зрения $d_0=25$ см от глаза (рис. 1). По формуле линзы

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}, \text{ или } \frac{1}{d_0}-\frac{1}{d}=\frac{1}{F},$$

находим оптическую силу очков:

$$D=\frac{1}{F}=\frac{d-d_0}{d_0d}\approx-2{,}7 \text{ дптр.}$$

Задача 2. *Какие очки нужны человеку, у которого расстояние наилучшего зрения оказалось равным $d=75$ см?*

Так же, как и в предыдущей задаче, предполагаем, что человеку удобно держать книгу на расстоянии $d_0=25$ см, а изображение в очках должно получиться на расстоянии $d=75$ см (рис. 2). По формуле линзы получаем, что оптическая сила очков

$$D=\frac{1}{F}=\frac{1}{d_0}-\frac{1}{d}=\frac{d-d_0}{d_0d}=+2{,}7 \text{ дптр.}$$

Фотоаппарат

В фотоаппарате с помощью линзы-объектива получают на пленке изо-

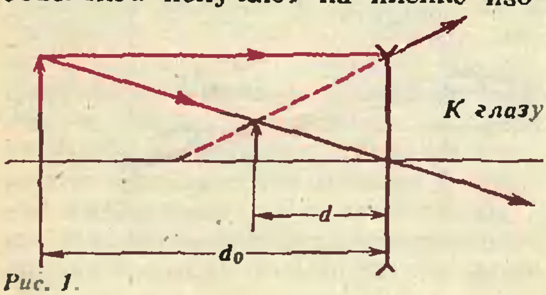


Рис. 1.

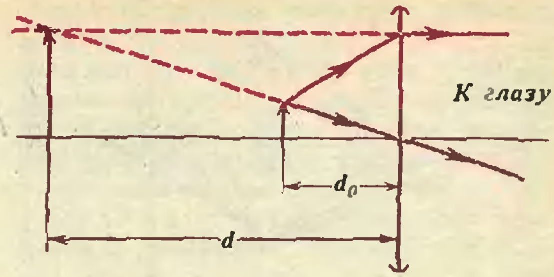


Рис. 2.

бражение фотографируемых предметов. Перемещая объектив относительно пленки, добиваются четкого изображения предметов, находящихся на разных расстояниях от фотоаппарата. Качество изображения зависит также от времени экспозиции, в течение которого открыт объектив фотоаппарата, и диаметра диафрагмы, стоящей перед объективом. Величина этих параметров определяется яркостью предмета и чувствительностью пленки. Если снимаются движущиеся предметы, время экспозиции должно быть достаточно малым, иначе изображение на пленке будет размытым. Диаметр диафрагмы определяет не только освещенность пленки, но и глубину резкости.

Задача 3. *На спутнике, летящем по круговой орбите на высоте $H=200$ км от Земли, расположен фотоаппарат, объектив которого имеет фокусное расстояние $F=40$ см. Разрешающая способность пленки (определяемая зернистой структурой фотоэмульсии), то есть минимальный размер различимых деталей изображения, равна $a=10$ мкм. Каков минимальный размер предметов на Земле, которые можно различить на пленке? Каково допустимое время экспозиции?*

Так как $H\gg F$, можно считать, что фотографируются предметы, находящиеся в бесконечности, и их изображения получаются четкими в фокальной плоскости объектива. По условию задачи можно различить

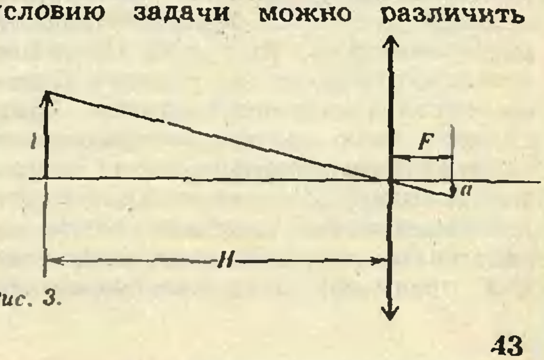


Рис. 3.

kvant.mccme.ru

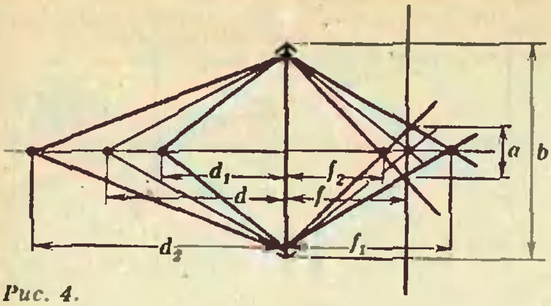


Рис. 4.

предметы, размер изображения которых больше a, поэтому (рис. 3)

$$l \geqslant a\frac{H}{F} = 5\text{ м}.$$

За время экспозиции t спутник и, следовательно, оптическая ось объектива поворачиваются на угол $\alpha = 2\pi t/T$, где $T = 2\pi\sqrt{R/g}$ — период обращения спутника, $R \approx R_З = 6400$ км. Изображение при этом «размоется» на величину αF. Это размытие должно быть не больше a. Отсюда

$$t = \frac{\alpha T}{2\pi} \leqslant \frac{a}{F}\sqrt{\frac{R}{g}} = 0{,}02\text{ с}.$$

Задача 4. *Из-за конечной разрешающей способности фотопленки на ней четко изображаются предметы, находящиеся от фотоаппарата на расстояниях от $d_1 = 15$ м до $d_2 = 30$ м. Не меняя наводки на резкость, объектив задиафрагмировали (то есть уменьшили диаметр открытой части объектива). При этом ближняя граница глубины резкости стала равной $d_1' = 10$ м. Найдите дальнюю границу глубины резкости.*

Пусть размер зернистой структуры фотоэмульсии a, диаметр объектива фотоаппарата b, а его фокусное расстояние F. Если аппарат навели на предмет, расположенный на расстоянии d от фотоаппарата, пленка расположена от объектива на расстоянии f, определяемом по формуле линзы (рис. 4):

$$f = \frac{dF}{d-F}.$$

Предмет, находящийся на расстоянии $d_1 < d$, будет четко изображаться на расстоянии $f_1 = d_1F/(d_1 - F)$. При этом каждая точка этого предмета будет засвечивать на пленке кружок. Если диаметр этого кружка не превышает размера зерен фотоэмульсии, мы не заметим расфокусировки. То же будет для предметов, расположенных на расстоянии $d_2 > d$. Каждая точка таких предметов будет изображаться точкой на расстоянии $f_2 = d_2F/(d_2 - F)$ от объектива, а на пленке будет образовываться кружок, диаметр которого не должен превышать a.

Из подобия треугольников на рисунке 4 имеем

$$\frac{a}{b} = \frac{f - f_2}{f_2} = \frac{f_1 - f}{f_1},$$

откуда получаем

$$\frac{2}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \qquad (1)$$

Если диаметр объектива стал b', то

$$\frac{a}{b'} = \frac{f - f_2'}{f_2'} = \frac{f_1' - f}{f_1'},$$

или

$$\frac{2}{f} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'}, \qquad (2)$$

где

$$f_2' = \frac{d_2'F}{d_2' - F} \quad\text{и}\quad f_1' = \frac{d_1'F}{d_1' - F}.$$

Из (1) и (2) находим

$$\frac{1}{f_2'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1'},$$

откуда, выражая f через d, получаем

$$d_2' = \frac{1}{\dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_2} - \dfrac{1}{d_1'}} \Rightarrow \infty.$$

Итак, дальняя граница глубины резкости лежит в бесконечности, и, следовательно, на пленке четко изображаются все предметы, расположенные дальше 10 м от объектива.

Микроскоп

Задача, которая ставится при конструировании этого прибора,— получить как можно большее увеличение изображения мелких предметов.

Микроскоп состоит из двух собирающих линз — объектива и окуляра. Объектив, обращенный к предмету, дает действительное увеличенное изображение предмета, а окуляр, расположенный непосредственно перед глазом наблюдателя, используется как

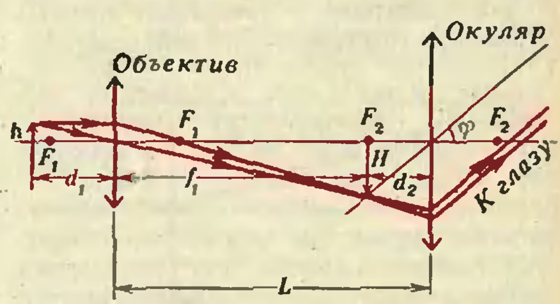


Рис. 5.

лупа, дающая мнимое увеличенное изображение. При этом глаз обычно аккомодирован на бесконечность.

Как видно из рисунка 5, изображение в микроскопе получается увеличенным и перевернутым. Найдем его угловое увеличение γ — отношение угла зрения φ на предмет через микроскоп к углу зрения φ_0 при наблюдении невооруженным глазом: $\gamma=\varphi/\varphi_0$. Если размер предмета h и он рассматривается глазом с расстояния наилучшего зрения d_0, то

$$\varphi_0=\frac{h}{d_0}.$$

Теперь найдем φ.

Увеличение системы линз всегда равно произведению увеличений каждой из линз, входящих в эту систему. Чтобы увеличение объектива было по возможности бо́льшим, предмет должен находиться близко к фокусу, поэтому можно принять, что $d_1=F_1$. Изображение, даваемое объективом, является предметом для окуляра. Если глаз аккомодирован на бесконечность, то «предмет» должен находиться в фокальной плоскости окуляра, то есть $d_2=F_2$. Из рисунка 5 получаем

$$\varphi=\frac{H}{F_2}=\frac{h(L-F_1-F_2)/F_1}{F_2}.$$

Очевидно, что в качестве и объектива, и окуляра разумно использовать короткофокусные линзы. Тогда

$$\varphi=\frac{hL}{F_1F_2},$$

и увеличение микроскопа в этих приближениях можно считать равным

$$\gamma=\frac{\varphi}{\varphi_0}=\frac{Ld_0}{F_1F_2}.$$

На основании этой формулы можно подумать, что, увеличивая расстояние между линзами L и приближая предмет к фокусу объектива, мы можем получить любые, сколь угодно большие увеличения микроскопа. Однако это не так. При достаточно больших расстояниях между линзой и изображением уже нельзя пользоваться приближенными построениями геометрической оптики, необходимо учитывать волновые свойства света и, в частности, явление дифракции, которое приводит к искажению изображения и даже к тому, что изображения не получается вообще. Из рассмотрения дифракционных явлений можно получить, что минимальный размер предмета, который можно рассмотреть в микроскоп без искажений, должен быть порядка длины световой волны. Для видимого света величина $l_{min}\sim 0{,}5$ мкм, а максимально возможное увеличение микроскопа $\sim 10^3$.

Задача 5. *Микроскоп имеет объектив с фокусным расстоянием $F_1=1$ см и окуляр с фокусным расстоянием $F_2=3$ см, расстояние между ними $L=20$ см. На каком расстоянии от фокуса объектива должен находиться объект, чтобы его изображение получилось на расстоянии наилучшего зрения $d_0=25$ см от окуляра? Чему равно при этом увеличение микроскопа?*

Будем считать, что изображение, даваемое объективом, находится приблизительно в фокусе окуляра. Тогда расстояние от объектива до изображения $f_1=L-F_2=17$ см, а искомое расстояние

$$x=d_1-F_1=\frac{f_1F_1}{f_1-F_1}-F_1=\frac{F_1^2}{L-F_1-F_2}\approx 0{,}06 \text{ см}.$$

Увеличение микроскопа равно приближенно

$$\gamma=\frac{(L-F_2)d_0}{F_1F_2}\approx 130.$$

Зрительные трубы. Телескоп

Зрительные трубы, предназначенные для наблюдений удаленных предметов, делятся на две группы: 1) состоящие из двух собирающих линз — «астрономическая труба», или труба Кеплера; 2) состоящие из собирающей и рассеивающей линз — «земная труба», или труба Галилея. И та, и другая трубы могут быть использованы в качестве телескопа. Систему линз называют телескопической, если входящий в нее параллельный пучок лучей выходит тоже параллельным, но под другим углом к оптической оси. Угловым увеличением зрительной трубы называют отношение углов, под которыми распространяются выходящий и входящий параллельные пучки света: $\gamma=\varphi_2/\varphi_1$.

Как правило, при рассматривании удаленных предметов с помощью зрительной трубы глаз наблюдателя аккомодирован на бесконечность, но бывают и исключения.

kvant.mccme.ru

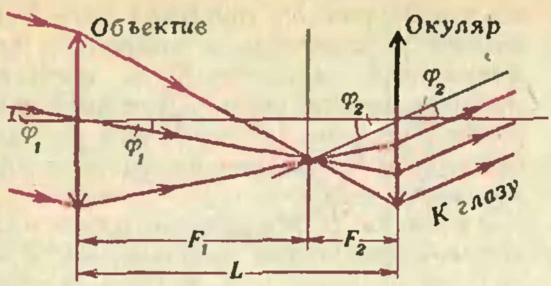


Рис. 6.

Труба Кеплера. Рассмотрим трубу Кеплера как телескопическую систему, настроенную на бесконечность. Из рисунка 6 видно, что

$$F_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = F_2 \operatorname{tg} \varphi_2.$$

Если углы малы, то

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \gamma = \frac{F_1}{F_2},$$

то есть увеличение трубы равно отношению фокусных расстояний объектива и окуляра. Длина трубы в этом случае равна $L = F_1 + F_2$; изображение в трубе перевернутое.

Задача 6. *Наблюдатель рассматривает удаленный предмет с помощью зрительной трубы Кеплера. Фокусные расстояния объектива и окуляра равны соответственно $F_1 = 30$ см и $F_2 = 5$ см. Наблюдатель видит четкое изображение предмета, если расстояние между объективом и окуляром трубы находится в пределах от $L' = 33$ см до $L'' = 34{,}5$ см. На каких расстояниях наблюдатель отчетливо видит предмет невооруженным глазом?*

Изображение удаленных предметов в объективе трубы получается в его фокальной плоскости, то есть на расстоянии $d_2 = L - F_1$ от окуляра. Изображение в окуляре всегда мнимое, и его расстояние до глаза (считаем, что глаз приложен вплотную к окуляру) меняется в пределах, вычисляемых по формуле линзы:

$$f_2 = \frac{d_2 F_2}{F_2 - d_2},$$

при $\begin{cases} d_2' = 3 \text{ см } f_2' = 7{,}5 \text{ см}, \\ d_2'' = 4{,}5 \text{ см } f_2'' = 45 \text{ см}. \end{cases}$

Как видно, наблюдатель страдает близорукостью — он не может видеть предметы, удаленные более чем на 45 см от глаза.

Труба Галилея. Рассмотрим настроенную на бесконечность трубу Галилея (рис. 7). В этом случае длина трубы $L = F_1 - F_2$; увеличение трубы

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{F_1}{F_2},$$

то есть тоже равно отношению фокусных расстояний (как и в трубе Кеплера). Изображение в трубе Галилея не перевернутое, а прямое, поэтому она удобнее для наблюдения удаленных предметов на Земле (почему ее иногда и называют «земной трубой»). В частности, театральный бинокль представляет собой не что иное, как трубу Галилея.

Задача 7. *Объективом театрального бинокля служит собирающая линза с фокусным расстоянием $F_1 = 8$ см, а окуляром — рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F_2 = 4$ см. Чему равно расстояние между объективом и окуляром, если изображение рассматривается глазом с расстояния наилучшего зрения? На сколько нужно переместить окуляр, если глаз аккомодирован на бесконечность?*

Так как расстояние до сцены, безусловно, много больше F_1, то изображение, даваемое объективом, будет расположено в его фокальной плоскости. Если расстояние между линзами L_1, то это изображение находится от окуляра на расстоянии $d_2 = F_1 - L_1$ справа от линзы по ходу лучей. Изображение в окуляре (мнимое) должно быть расположено на расстоянии $f_2 = d_0$. Применяя формулу линзы

$$-\frac{1}{F_1 - L_1} - \frac{1}{d_0} = -\frac{1}{F_2},$$

находим

$$L_1 = F_1 - \frac{F_2 d_0}{d_0 - F_2} \approx 3{,}2 \text{ см}.$$

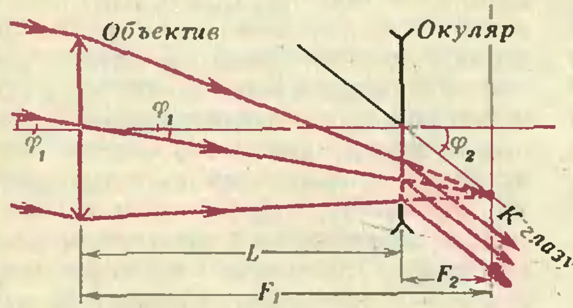
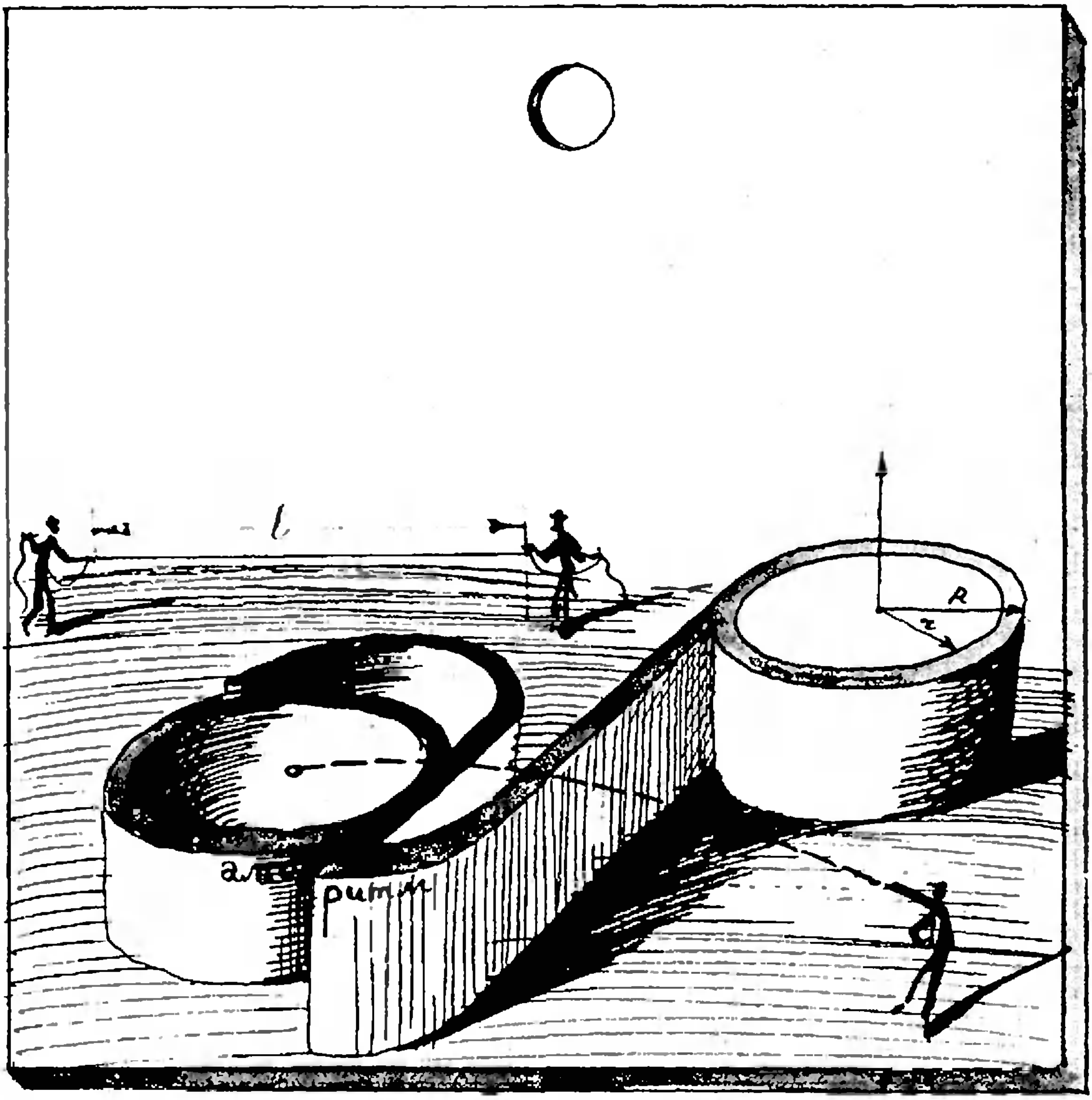


Рис. 7.

(Окончание см. на с. 51)

kvant.mccme.ru



Решение задач и построение алгоритмов

Кандидат технических наук
В. А. КАЙМИН

Задачи, задачи, задачи... Наша учеба, работа и личная жизнь — это каждодневное, ежечасное решение задач — учебных и производственных, инженерных и научных, организационных и личных. Квалификация и компетентность рабочего, инженера и специалиста определяются его знаниями и умением решать возникающие в работе задачи. Первым этапом в решении задачи является ее *постановка*. Второй этап решения задачи заключается в *подборе средств и способов решения*. Для решения сложных задач мы составляем планы, в которых выделяются вспомогательные *подзадачи*, а затем подбираются способы и средства для решения выделенных подзадач. Последний этап — это *реализация* выбранных планов и способов решения, завершающихся получением требуемых результатов.

Когда речь идет о решении задач с помощью компьютера, центральное место занимает *подбор алгоритмов* для решения задачи. В этой и в следующей заметке мы расскажем о *систематическом конструировании алгоритмов* применительно к тем задачам, которые решаются в курсе «Основ информатики и вычислительной техники» в 9-м и 10-м классах.

Ключевые этапы систематического конструирования алгоритмов можно проиллюстрировать следующей диаграммой (рис. 1). Посмотрим, как эта поэтапная

kvant.mccme.ru

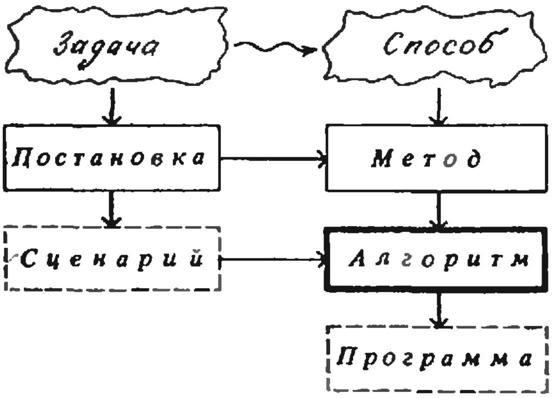


Рис. 1. Систематическое конструирование алгоритмов. Контуры около слов задача и способ расплывчаты: в начале задача и ее решение понимаются расплывчато, в общих чертах. Затем возникает уточненная постановка задачи, после которой общий способ превращается в четкий математический метод решения, а тот в свою очередь — в алгоритм. (Что имеется в виду под словом сценарий, вы узнаете в следующем номере «Кванта»; о программах речь пойдет лишь в конце 10-го класса.)

схема реализуется на нескольких простейших задачах.

Задача о площади кольца. В общих чертах ставится задача вычисления площади кругового кольца (рис. 2). В принципе понятно, как ее решать: из площади большего круга нужно вычесть площадь меньшего. Точную п о с т а н о в к у задачи можно записать так:

Задача: *найти площадь кольца.*
Дано: r — внутренний радиус,
R — внешний радиус.
Треб: S — площадь кольца.
Связь:

$$\begin{cases} S=S_1-S_2 & \text{— площадь кольца,} \\ S_1=\pi\cdot R^2 & \text{— площадь большего круга,} \\ S_2=\pi\cdot r^2 & \text{— площадь меньшего круга.} \end{cases}$$

При: $0<r<R$.

Обратите внимание на запись после слова **связь**: она, в сущности, дает нам м е т о д решения в виде системы уравнений. Важна также и запись после слова **при**: в ней указываются ограничения на переменные, входящие в задачу.

Теперь из метода легко получить алгоритм: в данном случае остается только в нужном порядке присвоить значения параметрам с учетом ограничений. Получим такой а л г о р и т м:

```
алг площадь (вещ r1 r2, S)
  арг r
  рез S
нач вещ S1, S2
  если 0<r1 и r1<r2
  то π:=3,14159
     S1:=π · r1²
     S2:=π · r2²
  все
кон
```


Задача о расстоянии между пешеходами. В общих чертах речь идет о вычислении расстояния между двумя пешеходами, идущими навстречу друг другу, в данный момент времени (рис. 3). Точная п о с т а н о в к а — следующая:

Задача: *Найти расстояние между пешеходами, идущими навстречу друг другу.*
Дано:
l_0 — начальное расстояние,
τ — время движения,
v_1 — скорость первого пешехода,
v_2 — скорость второго пешехода.
Треб: l_τ — текущее расстояние.
Связь:

$$\begin{cases} s_1+l_\tau+s_2=l_0 & \text{— общее расстояние.} \\ s_1=v_1\cdot\tau & \text{— путь первого пешехода,} \\ s_2=v_2\cdot\tau & \text{— путь второго пешехода.} \end{cases}$$

При: $\tau\geqslant 0$ и $v_0>0$.

Из уравнений, описывающих условие задачи (они следуют за словом **связь**), сразу извлекается м е т о д решения:

$$\begin{cases} s_1=v_1\tau, \\ s_2=v_2\tau, \\ l_\tau=l_0-(s_1+s_2). \end{cases}$$

А л г о р и т м теперь выписывается сразу:

```
алг расстояние (вещ l0, v1, v2, t, lt)
  арг l0, v1, v2, t
  рез lt
нач
  если l0>0 и t>0
то s1:=v1·t
     s2:=v2·t
     lt:=l0−(s1+s2)
  все
кон
```

Важным моментом в конструировании алгоритмов является нахождение уравнений связи, дающих точное математическое описание поставленной задачи. Иногда говорят, что этот выбор дает *математическую модель* рассмотренной задачи. В двух рассмотренных задачах выбор модели (уравнений связи) осуществляется однозначно, а вот в задачах по физике можно выбирать разные модели. Рассмотрим такой пример.

Задача о полете камня. В этой задаче, рассматриваемой в школьном учебнике по информатике, речь идет о полете камня, брошенного под некоторым углом к горизонту (рис. 4). В ней можно учитывать 1) кривизну поверхности Земли, 2) сопротивление воздуха, 3) изменение ускорения свободного падения, 4) притяжение Луны и другие тонкие физические явления и эффекты. Если в этой задаче движение по вертикали рассматривать как равнозамедленное, а движение по горизонтали — как равномерное, то мы получим следующие п о с т а н о в к у, м е т о д и а л г о р и т м решения задачи.

Задача: *Найти дальность полета камня, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0.*

kvant.mccme.ru

Дано: α — начальный угол [рад],
v_0 — начальная скорость [м/с].
Треб: l — дальность полета [м].
Связь:
$l=v_{x0}t$ — дальность полета,
$-gt^2/2+v_{y0}t=0$ — уравнение полета,
$v_{x0}=v_0\cos\alpha$ — горизонтальная скорость,
$v_{y0}=v_0\sin\alpha$ — вертикальная скорость,
$g=9{,}81$ — ускорение свободного падения.

При: $v_0>0$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Метод

$$\begin{cases} l=vx0\cdot t,\\ t=2vy0/g,\\ vx0=v0\cdot\cos\alpha,\\ vy0=v0\cdot\sin\alpha,\\ g=9{,}81.\end{cases}$$

Алгоритм

алг дальность (**вещ** a, l, $v0$)
  арг $v0$, a
  рез l
нач вещ g, $vx0$, $vy0$, t
  $g:=9{,}81$
  $vx0:=v0\cdot\cos a$
  $vy0:=v0\cdot\sin a$
  $t:=2vy0/g$
  $l:=vx0\cdot t$
кон

* * *

Для элементарных задач методы решения удается получать в точной аналитической форме. Для сложных задач, когда явная система расчетных формул не может быть получена, используются методы приближенных решений, требующие большого объема вычислений. Для приближенного вычисления некоторой величины y определяется некоторая последовательность приближений: $y_0, y_1, y_2, \ldots$, которые в пределе стремятся к искомой величине $y=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Последовательность приближений y_k ($k=0,1,2$) обычно подбирается таким образом, чтобы очередное значение y_k зависело от предыдущего члена определяемой последовательности y_{k-1}. Простейшей иллюстрацией служит метод Герона для извлечения квадратных корней.

Извлечение квадратного корня. Здесь постановка, метод и алгоритм следующие.
Задача: *Приближенно извлечь квадратный корень.*
Дано: x — исходное число,
e — точность вычисления.
Треб: z: $|\sqrt{x}-z|<e$.
При: $x\geqslant 0$, $e>0$.

Метод

$$\begin{cases} y_0=x,\\ y_k=1/2(y_{k-1}+x/y_{k-1})\end{cases}$$
$$[(k=(1,2,\ldots))\text{ до } |y_k-y_{k-1}|<e]$$

алг квадр. кор (**вещ** x,z)
  арг x
  рез z
нач вещ e, v, y
  $e:=0{,}0001$
  $v:=x$
  $y:=1/2(v+x/v)$
пока $|y-v|\geqslant e$
  нц
  $v:=y$
  $y:=1/2(v+x/v)$
  кц
  $z:=y$
кон

Этот алгоритм практически полезен лишь в ситуации, когда у исполнителя есть карманный калькулятор без клавиши $\boxed{\sqrt{}}$. А вот следующий алгоритм часто используется и на калькуляторе, и на ЭВМ; он позволяет решить практически любое уравнение.

Решение уравнений методом половинного деления. Для приближенного решения уравнений вида $f(x)=0$, где $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a;\ b]$, может быть применен метод половинного деления, если значения функции в концах отрезка имеют разные знаки — $f(a)\cdot f(b)<0$. Суть метода состоит в анализе значения функции в середине отрезка $c=\frac{a+b}{2}$. Если $f(c)=0$, то корень найден, в противном случае корень нужно искать на левом $[a;\ c]$ или на правом $[c;b]$ полуотрезке в зависимости от того, на

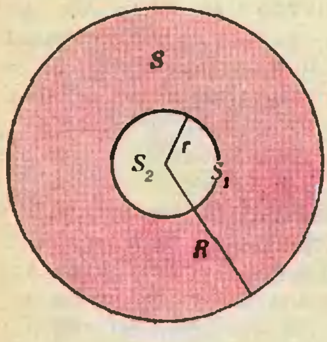


Рис. 2. Вычисление площади кольца.

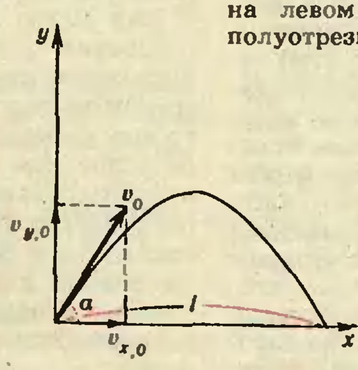


Рис. 3. Расстояние между пешеходами: а) начальный момент, б) текущий момент.

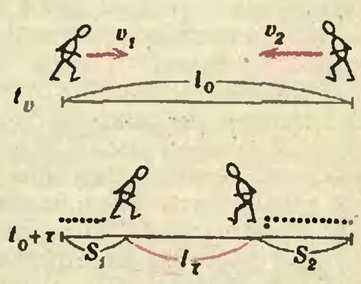


Рис. 4. Дальность полета брошенного камня.

kvant.mccme.ru

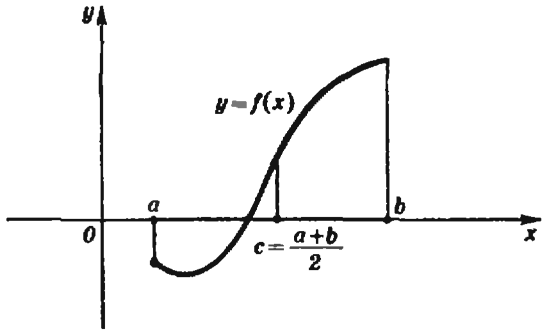


Рис. 5. Метод половинного деления.

концах какого из полуотрезков функция имеет противоположные знаки (рис. 5). Деление отрезков пополам продолжается до получения такого отрезка, что его длина $[a_k;\ b_k]$ станет меньше заданного ε. Этот метод можно записать так:

$$[a_0;\ b_0]=[a;\ b],$$

$$c_k=\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2},$$

$$[a_k;\ b_k]=\begin{cases}[a_{k-1};\ c_k] \text{ при}\\ f(a_{k-1})\cdot f(c_k)<0,\\ [c_k;\ b_{k-1}] \text{ при}\\ f(c_k)\cdot f(b_{k-1})<0;\end{cases}$$

$$k=1,\ 2,\ \ldots \text{ до } |b_k-a_k|<\varepsilon$$

Его реализация на алгоритмическом языке, то есть искомый алгоритм, можно записать следующим образом:

алг прибл. реш (**вещ** a, b, e, $x0$)
арг a, b, e
рез $x0$
нач вещ c
  $c:=(a+b)/2$
  пока $f(c)\neq 0$ **и**
    $(b-a)\geqslant e$
  нц
   если $f(a)\cdot f(c)<0$
   то $b:=c$
   иначе
   $a:=c$
   все
   $c:=(a+b)/2$
  кц
  $x0:=c$
кон

И. В. Курчатов: первые шаги в ЛФТИ

(Начало см. на с. 3)

(Курчатов и Синельников не указывают, в какую жидкость помещалась трубка с поршнем; они пишут, что опускали «...конец трубки с закрепленной фольгой в сосуд с жидкостью и осторожно вдували воздух».) При обычных температурных условиях σ для целого ряда жидкостей (этиловый эфир, диэтиламин и др.) лежит в пределах 0,015—0,020 Дж/м^3. Положим $\sigma=0{,}015$ Дж/м^2. Тогда, подставляя в (*) это значение σ и $d=0{,}5$ мкм, находим искомую величину Δp: $\Delta p=1{,}2\cdot 10^5$ Па (~ 1 атм) — достаточно большое давление! Недаром авторы писали о том, что сжимали воздух в цилиндрической трубке «с осторожностью». Нужно было, чтобы фольга не отклеилась от торца трубки, а главное, не разорвалась. Примененные Курчатовым и Синельниковым фольги были достаточно прочны, чтобы выдержать приложенное давление. Это же следует и из расчетов (по известным формулам сопротивления материалов для мембран), согласно которым напряжение, развивающееся при рассмотренном нами значении Δp, меньше предела прочности алюминия.

(Заметим, что формулу Лапласа для сходных целей в 1923 году использовал не кто иной, как А. Эйнштейн в совместной со своим другом, врачом Г. Мюзамом экспериментальной работе. В этой работе была предложена методика «экспериментального определения размера каналов в фильтрах» (так называлась соответствующая статья, в которой изучались пористые фильтры, применяемые для бактериологических и медицинских целей). По минимальному значению Δp, начиная с которого воздух продувался через фильтр и образовывал пузырьки в сосуде с жидкостью, куда этот фильтр помещался, определялся максимальный диаметр пор (каналов) в фильтре.)

Как видно из проведенных оценок, отверстия диаметром меньше 0,5 мкм вполне могли остаться не замеченными Гартигом. Между тем, поток электронов сквозь такие отверстия в фольге более чем достаточен, чтобы быть зафиксированным в опытах. Цель работы Курчатова и Синельникова, достигнутая в результате их простых и красивых контрольных экспериментов, и состояла в том, чтобы показать ошибочность сделанных Гартигом выводов о проницаемости сплошных (бездефектных) тонких фольг для медленных электронов.

Встреча с читателями

Нынешним летом, как и в прошлые годы, при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова проводились курсы повышения квалификации учителей средних школ страны. Программа математического отделения курсов предусматривала, в частности, традиционную встречу с членами редакционной коллегии журнала «Квант». Эта встреча состоялась 30 июня на механико-математическом факультете МГУ. В гости к слушателям курсов — учителям математики — пришли заместитель главного редактора журнала Ю. П. Соловьёв, члены редколлегии В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, Н. Х. Розов, А. П. Савин, А. Б. Сосинский.

Открывая встречу, Ю. П. Соловьев подробно остановился на задачах, которые стоят сегодня перед журналом, на ближайших и перспективных планах работы редакции. Выступившие на встрече члены редколлегии рассказали о различных разделах журнала, поделились своими соображениями о возможных формах использования журнала в практической деятельности школьного учителя. Большое внимание было уделено роли журнала в повышении уровня преподавания математики в школе, углублении математических знаний, учащихся, в решении актуальной сейчас проблемы их профессиональной ориентации. Особый интерес слушатели проявили к материалам журнала, которые призваны помочь ученикам и учителям в изучении нового школьного предмета «Основы информатики и вычислительной техники». Члены редакционной коллегии журнала ответили также на многочисленные вопросы участников встречи.

Подчеркивая важную роль журнала в развитии интереса школьников в математике, высоко оценивая его помощь учителям в классной и особенно во внеклассной работе, многие выступавшие на встрече учителя высказали в то же время критические замечания, внесли конкретные конструктивные предложения по дальнейшему улучшению журнала. В частности отмечалась явно недостаточная связь редакции, авторов с учительской общественностью страны, говорилось о том, что статьи журнала не всегда полностью увязаны с действующей школьной программой и иногда чрезмерно трудны для массового читателя-школьника.

Состоявшееся обсуждение журнала «Квант» показало, что у журнала имеется немало резервов для того, чтобы лучше и полнее удовлетворить запросы своих основных читателей — учащихся и учителей, чтобы стать более доступным и популярным для многочисленных любителей математики. Несомненно, что использование этих резервов поможет журналу еще активнее способствовать реализации тех задач, которые намечены документами о реформе общеобразовательной и профессиональной школы.

Н. Р.

Оптические приборы

(Начало см. на с. 42)

Если глаз аккомодирован на бесконечность, из бинокля должны выходить параллельные лучи, поэтому

$$L_2 = F_1 - F_2 = 4 \text{ см}.$$

Значит, окуляр нужно переместить на $\Delta L = L_2 - L_1 \approx 0{,}8$ см.

Упражнения

1. Человек видит мелкие детали предмета, если он расположен не далее 20 см от глаз. Какие очки ему необходимы?

2. При аэрофотосъемках местности используется фотоаппарат, объектив которого имеет фокусное расстояние $F = 15$ см. Минимальный размер различимых деталей изображения на фотопленке $a = 10$ мкм. На какой высоте должен лететь самолет, чтобы на фотографии можно было различить предметы размером до $l = 10$ см? При какой скорости самолета изображение «не испортится», если время экспозиции $t = 10^{-3}$ с?

3. Фотоаппарат сфокусирован на предмет, находящийся на расстоянии $d = 5$ м от него. До какого размера b нужно задиафрагмировать объектив с фокусным расстоянием $F = 20$ см, чтобы четко изображались предметы, расположенные на $\Delta d = 0{,}5$ м ближе снимаемого? Допустимая размытость деталей на пленке $a = 0{,}1$ мм.

4. Увеличение микроскопа $k = 600$, длина тубуса $L = 24$ см, фокусное расстояние окуляра $F_2 = 4$ см. Чему равна оптическая сила объектива?

5. Две трубы — Галилея и Кеплера — имеют одинаковую длину $L = 40$ см и одинаковое увеличение $\gamma = 9$. Определите фокусные расстояния линз, из которых собраны эти трубы.

kvant.mccme.ru

I Всесоюзная олимпиада по физике учащихся средних профессионально-технических училищ

На олимпийской «карте» появилась еще одна «координата» — олимпиада по физике учащихся СПТУ. По форме проведения эта новая олимпиада ничем не отличалась от традиционной школьной. Однако при подборе задач было учтено, что учащиеся профессионально-технических училищ теснее связаны с практикой, чем школьники, и поэтому их больше должны интересовать конкретные, можно сказать, «прикладные» задачи.

20 мая. Открытие олимпиады

Участники и организаторы олимпиады собрались в живописном комсомольском городке «Борис Дзиеладзе» недалеко от Тбилиси.

Председатель Госкомитета по профтехобразованию Грузинской ССР Н. В. Гургенидзе объявляет олимпиаду открытой. Все выступающие (среди них крупные ученые, учителя и сами участники олимпиады) пришли к единодушному мнению: главное — это участие, и все собравшиеся уже добились большой победы, завоевав право представлять свои республики на Всесоюзной олимпиаде.

Вечером проводилась викторина, во время которой в игровой форме олимпийцы должны были ответить на довольно сложные вопросы по физике, продемонстрировать свое логическое мышление и смекалку. Ответы ребят показали, что уровень подготовки собравшихся в Тбилиси довольно высок, а сама викторина послужила хорошей размикой перед главными испытаниями.

21 мая. Теоретический тур

В течение пяти часов ребята упорно и настойчиво решали предложенные им шесть задач. Вот условия этих задач:

I курс

1. На невесомой нити жесткостью k висит тело массой m. Нить выдерживает натяжение T. Тело приподнимают на высоту x (x отсчитывается от положения равновесия) и отпускают. При каком минимальном x нить оборвется?

2. Поршень в цилиндрическом сосуде прикреплен к правой стенке пружиной (рис. 1). Слева от поршня в цилиндре находится азот, справа — вакуум. При температуре $T_1 = 300$ К расстояние $x_1 = 40$ см, при $T_2 = 500$ К — $x_2 = 50$ см. Чему равна длина пружины в недеформированном состоянии? Каково будет расстояние x при температуре жидкого гелия? Длина сосуда $L = 80$ см. Трением поршня о стенки цилиндра пренебречь.

3. В сосуд, где должна поддерживаться постоянная температура (термостат), поместили $m = 1$ кг нафталина, причем k-я часть его расплавлена. В термостат наливают $M = 2$ кг воды. На сколько может отличаться начальная температура воды от температуры плавления нафталина, чтобы температура в термостате не изменилась? Температура плавления нафталина $t_{пл} = 80$ °С, удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг·К), удельная теплота плавления нафталина $\lambda = 151$ кДж/кг, считать $k = 1/2$.

4. Какое сопротивление R_0 должен иметь вольтметр, чтобы с точностью до 1 % измерить падение напряжения на резисторе с сопротивлением $R = 1$ кОм (рис. 2)? В цепи между точками A и B источник обеспечивает постоянный ток.

5. Вычислите сопротивление между точками A и B проволочной фигуры, изображенной на рисунке 3, если сопротивление одного звена равно R (звеном называется отрезок между двумя точками).

6. Гидрофон, установленный около дна большого водоема, зарегистрировал несколько последовательных сигналов, обусловленных взрывом на дне. Промежуток времени между первым и вторым сигналами оказался равным $T_1 = 1$ с, между первым и третьим сигналами — $T_2 = 3$ с. На каком расстоянии от гидрофона произошел взрыв? Скорость распространения звука в воде $v = 1500$ м/с, дно водоема плоское.

II и III курсы

1. Через неподвижное горизонтально закрепленное бревно переброшена веревка (рис. 4). Для того чтобы удерживать груз массой $m = 6$ кг, подвешенный на этой веревке, необходимо тянуть второй конец веревки с минимальной силой $F_1 = 40$ Н. С какой минимальной силой F_2 надо тянуть веревку, чтобы груз начал подниматься?

2. Для создания искусственной тяжести две части космического корабля (отношение масс $m_1 : m_2 = 1:4$) разводятся на расстояние L и приводятся во вращение вокруг их общего центра масс. Определите период вращения T, если маятниковые часы в кабине космонавта, расположенной в более массивной части корабля, идут вдвое медленнее, чем на Земле.

3. При изготовлении льда в холодильнике потребовалось $\tau_1 = 6$ мин, чтобы охладить воду

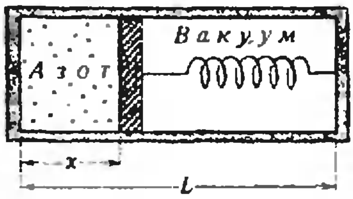


Рис. 1.

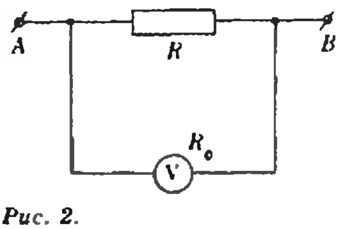


Рис. 2.

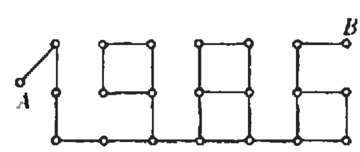


Рис. 3.

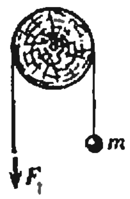


Рис. 4.

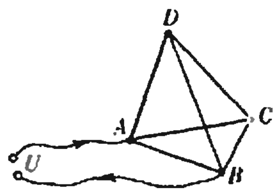


Рис. 5.

от $t_1=4$ °С до $t_2=0$ °С, и еще $\tau_2=2$ ч, чтобы превратить ее в лед. Чему равна удельная теплота плавления льда? Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг·К).

4. Шкала прибора с ценой деления $i_0=5$ мкА имеет $n=100$ делений. Внутреннее сопротивление прибора $r=50$ Ом. Как из этого прибора сделать вольтметр для измерения напряжений до $U=200$ В или миллиамперметр для измерения токов до $I=800$ мА?

5. Проволочный каркас в виде тетраэдра подключен к источнику постоянного напряжения U (рис. 5). Сопротивление каждого ребра равно R. Исключение какого из ребер каркаса приведет к наибольшему изменению тока I в цепи? Чему равно это максимальное изменение тока ΔI_{max}? Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

6. На дне озера глубиной h находится точечный источник света. На поверхности воды плавает круглый плот, причем центр плота находится как раз над источником. С вертолета, летающего над озером, обнаружить источник не удается. Коэффициент преломления воды равен n. Каков радиус плота?

Результаты оказались отличными: было довольно много работ со 100-процентным результатом, не нашлось ни одного человека, кто не смог решить хотя бы одну задачу.

Вечером того же дня был проведен разбор решений теоретических задач.

22 мая. День отдыха

В этот день с утра ребят ждала экскурсия по городу. После обеда те, кто был не согласен с оценкой своей работы, могли обратиться в жюри с апелляцией. Оказалось, что, ознакомившись накануне с решениями задач, ребята достаточно объективно оценили свои результаты и несогласных почти не было. А те немногие, кто обратился в апелляционную комиссию, в основном отстаивали свои в целом верные, но неумело сформулированные идеи. Особенно рьяно боролся за интересы ребят из своей команды заместитель капитана сборной Украины А. Новосельский (Киев, СПТУ № 16), за что и был впоследствии отмечен специальным призом «За настойчивость в спорах с жюри».

Вечером состоялась встреча с молодыми учеными Грузии и дискотека.

23 мая. Экспериментальный тур

За четыре часа каждый участник должен был выполнить два эксперимента (два часа на каждое задание). Работы были подобраны так, чтобы путь получения результата и оценка его точности и достоверности оказались не менее важными, чем сам результат. По ходу дела выяснилось, что большинство «думают руками»: сначала что-то сделают, а лишь потом понимают, что получилось. К сожалению, вопрос о точности полученных величин многие посчитали второстепенным, и некоторые вообще не обратили на него внимания.

В целом оценки за эксперимент хорошо коррелировали с оценками за теоретический тур. Правда, некоторые ребята лучше справились с экспериментом, чем с теоретическими задачами, что вполне естественно: в Тбилиси приехали ребята, знакомые с практикой не только по книгам.

24 мая. Закрытие олимпиады

Закрытие — это прежде всего подведение итогов и награждение победителей.

Дипломы I степени получили

по I курсу: Д. Вялков (Челябинск, СПТУ № 44), И. Екимов (Барановичи, СПТУ № 118), С. Михайлуца (Дубна, СПТУ № 67), А. Печенкин (Павлодар, СПТУ № 7), В. Уторин (Стрый, СПТУ № 34);

по II и III курсам: О. Влашин (Ивано-Франковск, СПТУ № 4), В. Дерюгин (Красноярск, СПТУ № 10), И. Петрухин (Северодонецк, СПТУ № 99), Ю. Прудкой (Комсомольский Харьковской обл., СПТУ № 31), В. Трофимюк (Здолбунов, СПТУ № 2).

Больше других дипломы I, II и III степени получили команды Украины, РСФСР, Казахстана и Белоруссии. На Украину уехало и несколько специальных призов, в том числе — за абсолютно лучший результат (В. Трофимюк). Специальный приз журнала «Квант» — годовая подшивка журнала за 1985 год с автографами членов редколлегии — был вручен А. Шамову, приехавшему в Тбилиси с Камчатки.

А. Э Аринштейн, Б. И. Геллер

XII Всероссийская олимпиада школьников

По сложившейся традиции, в дни весенних школьных каникул проходил заключительный, зональный этап Всероссийской физико-математической и химической олимпиады школьников 8—10 классов. Ниже приводятся условия задач по математике и физике, предлагавшихся на заключительном этапе, и фамилии победителей XII Всероссийской олимпиады школьников.

Математика

8 класс

1. Через точку O внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ проведены четыре окружности одинакового радиуса, каждая из которых касается двух смежных сторон четырехугольника. Докажите, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

2. Длина стороны правильного пятиугольника равна a. Вычислите длину диагонали пятиугольника: а) используя формулы тригонометрии; б) не используя формулы тригонометрии.

3. Целые числа a, b, c в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Может ли последняя цифра в десятичной записи числа $N=a^3+b^3+c^3-3abc$ быть равной 0, а предпоследняя цифра при этом быть равной 2?

4. По дороге едут четверо: первый — на автомобиле, второй — на мотоцикле, третий — на мопеде, четвертый — на велосипеде, каждый — со своей постоянной скоростью. Едущий на автомобиле догнал мопед в 12 часов,

встретился с велосипедистом в 14 часов, а с мотоциклистом — в 16 часов. Мотоциклист встретил мопед в 17 часов и догнал велосипедиста в 18 часов. Когда велосипедист встретил мопед?

5. На прямоугольном столе без наложений лежат 25 монет так, что нельзя положить еще одну монету, не накладывая ее на лежащие монеты. Докажите, что, допуская наложения монет, весь стол можно покрыть 100 такими монетами. (Монеты — это кружочки одинакового радиуса. Монета может высовываться за край стола, но так, чтобы ее центр оставался на столе. Покрыть стол монетами — значит расположить монеты на столе так, чтобы каждая точка стола находилась под какой-нибудь монетой.)

9 класс

1. По окружности в некотором порядке расположены 15 черных и 15 белых фишек. За один ход разрешается поменять местами любые две фишки. За какое наименьшее число ходов из произвольного исходного расположения фишек можно перейти к расположению, в котором каждые две соседние фишки имеют разный цвет?

2. Числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 неотрицательные, причем $a_1=a_7=0$. Докажите, что для некоторого номера $i\in\{2, 3, 4, 5, 6\}$ выполняется неравенство $a_{i+1}+a_{i-1}\leqslant a_i\sqrt{3}$.

3. Равные прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (вершины перечислены против часовой стрелки) наложены друг на друга так, что середины M их гипотенуз AB и A_1B_1 совпадают. Пусть D — точка пересечения прямых BC и B_1C_1, E — точка пересечения прямых AC и A_1C_1. Докажите, что точки C, D, M и E лежат на одной окружности.

4. На доске нарисовали треугольник ABC. На сторонах AB и BC вне треугольника построили квадраты с центрами P и Q, а на стороне AC отметили точку R, такую, что $AR:RC=1:2$. После этого с доски стерли все, кроме точек P, Q, R. Как с помощью циркуля и линейки восстановить треугольник ABC?

5. Натуральные числа 1, 2, ..., $3n$ произвольно разделили на три группы по n чисел в каждой. Докажите, что из каждой группы можно выбрать по одному числу так, что одно из выбранных чисел будет равно сумме двух других.

10 класс

1. Даны окружность и точка M внутри нее. Докажите, что сумма квадратов длин взаимно перпендикулярных хорд данной окружности, пересекающихся в точке M, есть постоянная величина.

2. Пусть a и b — различные положительные числа. Докажите, что справедливы неравенства:

$$\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}.$$

3. Найдите объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если диагонали AB_1, B_1C, BD_1 попарно перпендикулярны и их длины равны соответственно a, b, c.

4. Имеются гири массой 1^2 г, 2^2 г, 3^2 г, ..., 1000^2 г. Докажите, что их можно разделить на две группы одинаковой массы по 500 гирь в каждой.

5. Каждая точка плоскости окрашена в один из двух цветов. Известно, что у любого правильного треугольника со стороной 1 имеются вершины обоих цветов. а) Докажите, что найдется правильный треугольник со стороной $\sqrt{3}$, все вершины которого одного цвета. б) Приведите пример раскраски плоскости, удовлетворяющей условию задачи.

Физика

Задание по физике состояло из четырех теоретических и двух экспериментальных задач. Каждая задача оценивалась по десятибалльной системе и считалась решенной, если за ее решение давалось шесть и более баллов. Результаты оказались следующими:

Теоретический тур

Класс	Задачи: 1	2	3	4
8	48 %	14 %	37 %	2 %
9	49 %	23 %	9 %	23 %
10	74 %	23 %	51 %	5 %

Экспериментальный тур

Класс	Задачи: 1	2
8	25 %	13 %
9	55 %	51 %
10	24 %	25 %

Как видно, наибольшие затруднения вызвала задача 4 для учащихся 8 и 10 классов и задача 3 для учащихся 9 классов.

Теоретический тур

8 класс

1. В сосуде с водой плавает кусочек льда, удерживаемый нитью (рис. 1). Натяжение нити $F=10$ Н. На сколько изменится уровень воды в сосуде, если лед растает? Площадь сечения сосуда $S=100$ см^2.

2. На наклонной плоскости с углом наклона $\alpha=45°$ находится доска массой $M=1$ кг и длиной $l=1{,}4$ м, на конце которой лежит кубик массой $m=0{,}5$ кг (рис. 2). В начальный момент доска и кубик покоятся. Определите время соскальзывания кубика с доски. Коэффициент трения доски о плоскость $\mu=0{,}7$, трением кубика о доску пренебречь.

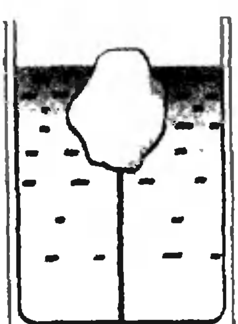


Рис. 1.

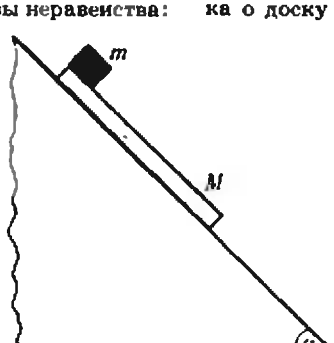


Рис. 2.

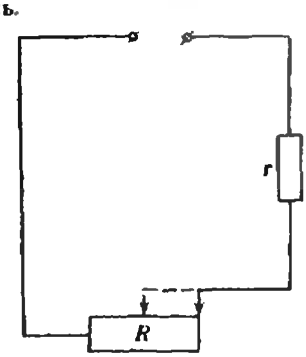


Рис. 3.

kvant.mccme.ru

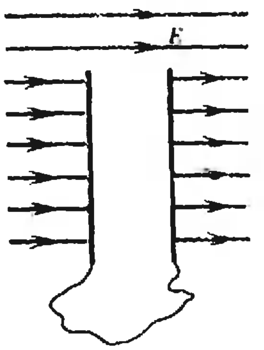


Рис. 4.

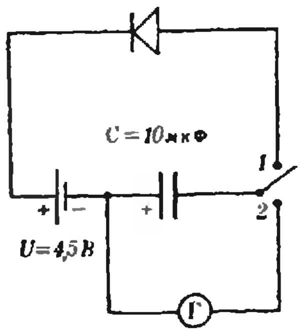


Рис. 5.

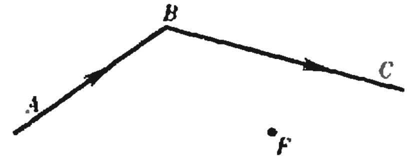


Рис. 6.

3. Нагреватель подключен к сети через реостат (рис. 3). Сопротивление реостата $R=30$ Ом. Если сопротивление нагревателя $r=90$ Ом, то при полностью введенном реостате вода закипает через время $t=8$ мин. При каком сопротивлении нагревателя вода закипит через время $t'=4$ мин, если реостат введен наполовину? Тепловыми потерями пренебречь.

4. Тело бросили вертикально вверх со скоростью $v_0=10$ м/с. В момент падения на землю оно имело скорость $v_к=9$ м/с. Определите время движения тела, если сила сопротивления пропорциональна скорости тела.

9 класс

1. Утюг с терморегулятором при номинальном напряжении сети периодически включается на 1 минуту, поддерживая почти неизменную температуру. При пониженном на 10 % напряжении сети это время увеличивается до 2 минут. При каком напряжении в сети терморегулятор еще может поддерживать эту температуру?

2. На берегу реки на некотором расстоянии друг от друга находятся два пункта A и B. Ваша задача приплыть на катере из пункта A, стоящего ниже по течению реки, в пункт B, затратив при этом минимальное количество горючего. Будем считать, что сила сопротивления пропорциональна скорости катера относительно воды, а расход горючего пропорционален мощности, развиваемой двигателем. Эти предположения являются несколько упрощенными, но они правильно отражают действительность. На скорость течения реки вдоль пути следования ограничений не накладывается, то есть она может меняться достаточно произвольно. Конечно, имеется в виду, что мощность двигателя достаточна, чтобы плыть против течения. Как найти необходимое время, если известна скорость реки в каждой точке пути?

3. Тело массой $m=1$ кг бросили вертикально вверх. Разность между начальной скоростью и скоростью в момент падения тела на землю $\Delta v=1$ м/с. Определите среднюю мощность, развиваемую силой сопротивления за все время движения, если сила сопротивления пропорциональна скорости тела.

4. Две плоскопараллельные пластины площадью S каждая соединены проводящей проволокой и находятся во внешнем однородном электростатическом поле с напряженностью $\vec{E}$ на расстоянии d друг от друга (рис. 4). Какую работу надо совершить для сближения пластин на расстояние $d/2$? Вектор напряженности $\vec{E}$ перпендикулярен плоскости пластин. Размеры пластин много больше расстояния между ними.

10 класс

1. Для измерения обратного тока полупроводникового диода была собрана схема, приведенная на рисунке 5. Перед подключением конденсатор зарядили до полного напряжения батареи, а затем включили в схему «плюсом» к «минусу» батареи. Выдержав ключ в положении 1 время $\tau_1=1$ мин, его перебросили в положение 2. При этом стрелка гальванометра отклонилась на $n_1=5$ делений. Опыт повторили, время выдержки выбрали $\tau_2=2$ мин, при этом стрелка гальванометра отклонилась в другую сторону на $n_2=20$ делений. Определите по этим данным обратный ток диода, считая, что он практически не зависит от приложенного к диоду обратного напряжения.

2. На гладкой горизонтальной поверхности льда покоится доска массой M и длиной l, на одном из концов которой сидит котенок массой m. С какой наименьшей скоростью относительно льда он должен прыгнуть, чтобы попасть на другой конец доски? Какой угол α_0 с горизонтом должна составлять эта скорость, чтобы котенок затратил на прыжок к другому концу доски минимум энергии?

3. Два одинаковых маленьких шарика подвешены на одинаковых длинных нитях к одному крючку. Один из шариков отводят влево на некоторый малый угол, а второй — вправо (в той же плоскости) на угол вдвое меньший и одновременно отпускают. Через время τ после этого происходит упругое центральное соударение шариков. Через сколько времени после соударения нить второго шарика отклонится на свой первоначальный угол?

4. На рисунке 6 дан ход луча ABC через тонкую собирающую линзу и точка F — ее задний фокус. Найдите построением с помощью циркуля и линейки с делениями положение линзы и ее главную оптическую ось.

Экспериментальный тур

8 класс

1. Исследуйте зависимость КПД генератора переменного тока от величины нагрузочного сопротивления.

Оборудование: электрический генератор переменного тока, штатив с муфтой и лапкой, нить, соединительные провода, вольтметр переменного тока, магазин сопротивлений, линейка, секундомер, набор грузов для работ по механике.

2. Оцените свою максимальную мощность при прыжке в высоту без разбега.

Оборудование: измерительная лента.

(Окончание см. на с. 57)

kvant.mccme.ru

Призеры XII Всероссийской олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Безрукавников Р. (Калуга, с. ш. № 24),
Блинова Т. (Йошкар-Ола, с. ш. № 4),
Калинин А. (Саратов, с. ш. № 13),
Румынин Д. (Красноярск, с. ш. № 10);

по 9 классам —
Васильев К. (Тула, с. ш. № 36),
Дынников И. (Жуковский, с. ш. № 1),
Каринский А. (Невинномысск, с. ш. № 6),
Лещенко А. (Новокузнецк, с. ш. № 11),
Стыркас К. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Чувелев М. (Горький, с. ш. № 4);

по 10 классам —
Дынников А. (Жуковский, с. ш. № 1),
Игнатьев М. (Саратов, с. ш. № 13),
Капович В. (Хабаровск, с. ш. № 2),
Шеремет С. (Воркута, с. ш. № 14).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Гравит В. (Северодвинск, с. ш. № 27),
Либанов М. (Ангарск, с. ш. № 10),
Шамов З. (Махачкала, с. ш. № 39),
Щербаков К. (Арзамас, с. ш. № 2);

по 9 классам —
Гусманов Р. (п. Дюртюли Башкирской АССР, с. ш. № 3),
Малыгин С. (Липецк, с. ш. № 52),
Рогонов А. (Касимов, с. ш. № 1),
Черных А. (Краснодар, с. ш. № 4),
Шанько Ю. (Красноярск, с. ш. № 10);

по 10 классам —
Арапов А. (Воронеж, с. ш. № 58),
Вайсбурд М. (Томск, с. ш. № 6),
Рябочкин М. (Калуга, с. ш. № 10),
Филимоненков В. (Свердловск, с. ш. № 130).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Вологодский В. (Омск, с. ш. № 91),
Исаханов А. (Сочи, с. ш. № 22),
Пелевин О. (Кострома, с. ш. № 32),
Петрова Н. (Пермь, с. ш. № 22);

по 9 классам —
Меркулов Б. (Куйбышев, с. ш. № 11),
Осолоткин А. (Петрозаводск, с. ш. № 29),
Плотников А. (Новочеркасск, с. ш. № 7),
Поляков К. (Хабаровск, с. ш. № 2),
Руденко К. (Андропов, с. ш. № 27);

по 10 классам —
Асташкевич А. (Томск, с. ш. № 24),
Клеонский В. (Кириши, с. ш. № 4),
Муштари А. (Казань, с. ш. № 18),
Рощин А. (Тамбов, с. ш. № 29).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Григорян Г. (Краснодар, с. ш. № 34),
Жуков В. (Магадан, с. ш. № 1),
Медведев М. (Горький, с. ш. № 40),
Мороз В. (Калининград, с. ш. № 32);

по 9 классам —
Будько Д. (Белгород, с. ш. № 3),
Васильев Ю. (Ангарск, с. ш. № 10),
Карасев Д. (п. Тучково Московской обл., Тучковская с. ш.),
Мельников Д. (Тула, с. ш. № 36),
Наянов Ю. (Саратов, с. ш. № 13),
Пигарев А. (Улан-Удэ, с. ш. № 9),
Щербаков А. (Обнинск, с. ш. № 10),
Янович А. (Челябинск, с. ш. № 31);

по 10 классам —
Бедов К. (Челябинск, с. ш. № 138),
Булатов О. (Ставрополь, с. ш. № 1),
Волков О. (Горький, с. ш. № 23),
Иртегов Д. (Иркутск, с. ш. № 19),
Кларк П. (Тула, с. ш. № 36),
Мингалев И. (Апатиты, с. ш. № 2).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Билибин А. (Боровичи, с. ш. № 1),
Мамаев А. (Заволжье, с. ш. № 17),
Михайловский Н. (Красноярск, с. ш. № 20),
Шандыбин С. (Брянск, с. ш. № 7);

по 9 классам —
Бобылев С. (Березники, с. ш. № 3),
Бознев А. (Нальчик, с. ш. № 2),
Ивашкович Е. (Прокопьевск, с. ш. № 72),
Розенберг А. (Уфа, с. ш. № 91),
Слесарев В. (Тула, с. ш. № 36);

по 10 классам —
Зайденварг А. (Кемерово, с. ш. № 1),
Иванов С. (Уфа, с. ш. № 12),
Мячин А. (Кострома, с. ш. № 34),
Патрушев К. (Элиста, с. ш. № 3).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Волынский К. (п. Протва Калужской обл., с. ш. № 1),
Головин Д. (Тамбов, с. ш. № 29),
Сибиряков А. (Томск, с. ш. № 30),
Тодощенко И. (Пермь, с. ш. № 16);

по 9 классам —
Бабанов М. (Полевской, с. ш. № 18),
Вихлин А. (Рязань, с. ш. № 20),
Курзенков А. (Ковров, с. ш. № 1),
Логвиненко С. (Орел, с. ш. № 19),
Тернугов В. (Томск, с. ш. № 50);

по 10 классам —
Абанов А. (Красноярск, с. ш. № 170),
Ларкин А. (Армавир, с. ш. № 6),
Нецветаев Д. (Челябинск, с. ш. № 127),
Орехов Д. (Новгород, с. ш. № 10).

kvant.mccme.ru

(Начало см. на с. 53)

9 класс

1. Определите влажность воздуха в комнате.

Оборудование: водяной манометр, шар для взвешивания воздуха, резиновая трубка, термометр, пипетка, справочник по физике.

2. Одним из способов получения холода является смешивание снега (или льда) с поваренной солью. Определите, какую максимальную концентрацию соли имеет смысл создавать в таком холодильнике.

Оборудование: снег (или мелко колотый лед), калориметр, термометр, весы с разновесами, ложечка.

10 класс

1. Определите оптическую систему «черного ящика».

Оборудование: «черный ящик», миллиметровая бумага, лист картона, булавки, линейка.

2. Исследуйте зависимость жесткости пружины от ее диаметра. Полученные результаты объясните.

Оборудование: штатив с лапкой, набор пружин, линейка, набор грузов, нить.

Публикацию подготовили

Б. Б. Буховцев, Б. Н. Кукушкин, Л. П. Купцов, О. Ю. Овчинников, С. В. Резниченко

Ответы, указания, решения

Где ошибка?

(*см. с. 21*)

1. Написанная система неравенств выражает необходимое, но не достаточное условие того, что оба корня больше 1. Чтобы найти правильное решение, вычислим корни: $x_{1,2}=2\pm\sqrt{5-a^2}$. Условие задачи равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2+\sqrt{5-a^2}>1, \\ 2-\sqrt{5-a^2}>1, \\ a^2<5 \end{cases}$$

(первое из которых, конечно, можно отбросить, поскольку оно является следствием второго).

Ответ: $2<a<\sqrt{5}$ или $-\sqrt{5}<a<-2$.

2. Условиям задачи удовлетворяет середина O_1 ребра BD, которая, конечно, действительно является граничной точкой тетраэдра. Но на самом деле таких точек две. Чтобы получить вторую точку, необходимо провести прямую через точку O_1 и середину O_2 ребра AC и взять на ней такую точку X, что O_1 есть середина отрезка XO_2 (рис. 1). Чтобы обосновать это, удобно воспользоваться прямоугольной системой координат с началом в точке O_1, у которой ось x направлена по ребру BD, а ось z — по прямой O_1O_2.

Ответ: граничная или внешняя.

3. В каждый из трехгранных углов призмы можно вписать шар, касающийся конуса или его продолжения. Восемь получающихся шаров разбиваются на четыре пары одинаковых. Радиусы четырех различных шаров найдены правильно. Однако один из этих шаров условиям задачи не удовлетворяет: шары радиуса 3/5, вписанные в трехгранные углы с вершинами A_1 и C_1, касаются не конуса, а его продолжения. Остальные шары действительно касаются конуса.

Ответ: $\frac{12}{29}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{12}{25}$.

Избранные школьные задачи

1. $(n^2+n)^2=n^4+2n^3+n^2<n^4+2n^3+2n^2+2n+1<n^4+2n^3+3n^2+2n+1=(n^2+n+1)^2$.

2. Указание. Один из концов отрезка лежит на пересечении данной окружности и прямой, центрально-симметричной данной прямой относительно данной точки. Задача может иметь 0, 1 или 2 решения.

3. {1; 3; 5; 9; 21}. Указание. Из равенства

$$n^3+3=(n^3+27)-24=(n+3)(n^2-3n+9)-24$$

следует, что число $n+3$ является делителем числа 24.

4. Существует. Указание. Воспользуйтесь тем, что $a=\dfrac{S}{2h_a}$, и докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}>\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5. 2300 км. Решение. Рассмотрим произвольный путь автомобилиста. Отмерив от конца 1500 км, заметим, что в этой точке у автомобилиста было не менее 150 л бензина. Значит, до этого места он проехал каждую точку пути не менее трех раз. Отложим от этого места еще 500 км назад и увидим, что здесь у автомобилиста должно быть не менее 300 л бензина. Поэтому любую предыдущую точку пути он проехал не менее пяти раз. Отложим назад еще 300 км. На эти 300 км потрачено не менее 150 л бензина. Значит, более 2300 км автомобилист проехать не может. Покажем, что автомобилист может проехать 2300 км.

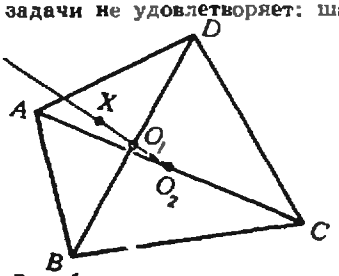


Рис. 1.

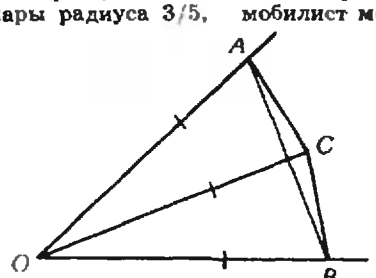


Рис. 2

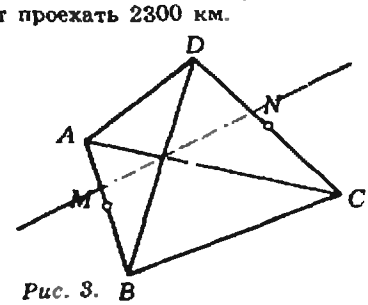


Рис. 3.

kvant.mccme.ru

Автомобилист берет 150 *л* бензина и проезжает 300 км. Оставляет 90 *л*, возвращается назад, снова берет 150 *л* бензина и снова проезжает 300 км. Оставляет еще 90 *л*, опять возвращается назад, забирает последние 150 *л* и снова проезжает расстояние 300 км. Тем самым на отметке в 300 км он имеет 300 *л* бензина. Автомобилист наполняет бак и проезжает 500 км. Оставляет 50 *л*, возвращается к бензину и забирает его весь. Доехав до отметки 800 км, забирает оставленные 50 *л*, после чего проезжает еще 1500 км.

6. $(7^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}=7^5=16\,807>15\,625=5^6>(5^{\sqrt{7}})^{\sqrt{5}}$, так что

$$7^{\sqrt{5}}>5^{\sqrt{7}}.$$

7. Нужно выбрать такую конфигурацию, для которой $OA=OB=OC$ (рис. 2). Указание. Докажите, что из треугольников с данным углом и данной противолежащей стороной наибольшую площадь имеет равнобедренный. Применив это утверждение к треугольнику OAB (считая пока треугольник ABC неизменным), получаем, что для четырехугольника $OABC$ наибольшей площади должно быть $OA=OB$, то есть точка C должна лежать на биссектрисе угла AOB. Остается применить то же утверждение к треугольникам OAC и OBC.

8. Не делится. Решение. Пусть v_n — остаток от деления на 7 числа u_n. Легко посчитать несколько первых членов последовательности v_n:

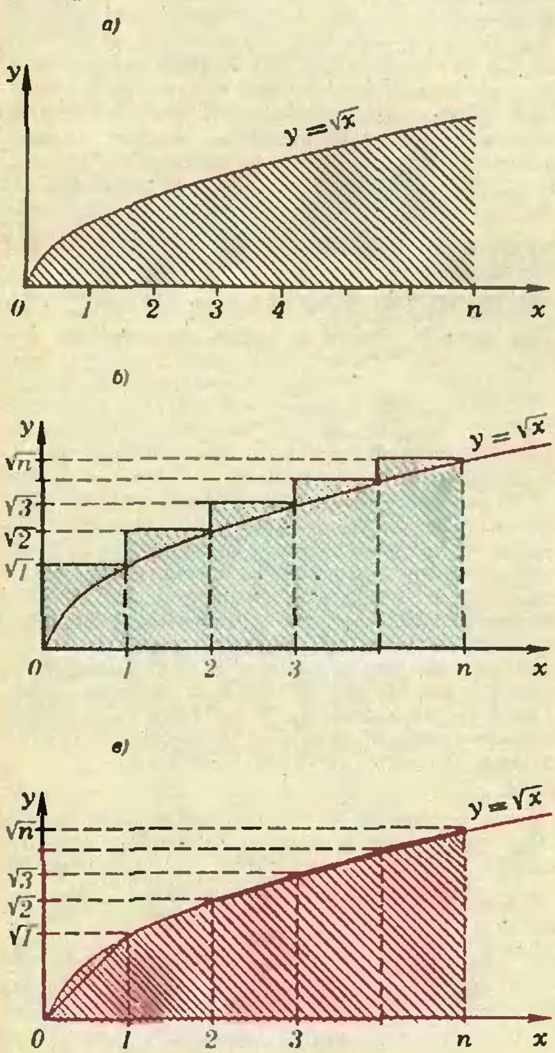


Рис. 4.

$$v_1=1,\ v_2=1,\ v_3=2,\ v_4=5,\ v_5=1,\ v_6=5,\ v_7=5,\ v_8=1.$$

Так как пара (v_4, v_5) совпадает с парой (v_7, v_8), последовательность v_n, начиная с четвертого члена, периодическая с периодом 3, то есть $v_{n+3}=v_n$ при $n\geqslant 4$. Значит, среди членов последовательности v_n нет нуля.

9. Выберем произвольную точку O плоскости. Обозначим

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c},\ \overrightarrow{OM}=\vec{m},\ \overrightarrow{ON}=\vec{n}.$$

Тогда

$$\vec{n}=\frac{n}{n+1}\vec{a}+\frac{1}{n+1}\vec{c},$$

$$\vec{m}=\frac{n-1}{n}\vec{a}+\frac{1}{n}\vec{b}.$$

Пусть $\vec{b}=x\vec{a}+y\vec{c}$. Тогда

$$\vec{n}=\frac{n}{n+1}\left(\vec{a}+\frac{1}{n}\vec{c}\right),$$

$$\vec{m}=\left(1-\frac{1}{n}+\frac{x}{n}\right)\vec{a}+\frac{y}{n}\vec{c}.$$

Если прямая MN проходит через точку O, то векторы $\vec{n}$ и $\vec{m}$ коллинеарны, то есть $1-\frac{1}{n}+\frac{x}{n}=y$, откуда $y-1=(1-x)\cdot\frac{1}{n}$. Так как это равенство должно выполняться при любом натуральном n, получаем, что $x=1$, $y=1$. Поэтому $\vec{b}=\vec{a}+\vec{c}$. Значит, *точка O такова, что четырехугольник $ABCO$ — параллелограмм.*

10. При $a<-\frac{1}{4}$ решений нет.

При $a\geqslant-\frac{1}{4}$ получаем $x=\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$.

11. $\frac{1}{4}$. Решение. Пусть $x_1+x_3+x_5+\ldots=a$, $x_2+x_4+x_6+\ldots=b$. Тогда $a+b=1$ и

$$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n\leqslant$$
$$\leqslant(x_1+x_3+\ldots)(x_2+x_4+\ldots)=$$
$$=ab=a(1-a)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-a\right)^2\leqslant\frac{1}{4}.$$

Если положить $x_1=x_2=1/2$, $x_3=x_4=\ldots=x_n=0$, то

$$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\frac{1}{4}.$$

12. Проведем общий перпендикуляр MN к противоположным ребрам AB и CD тетраэдра (рис. 3) и рассмотрим симметрию тетраэдра относительно прямой MN. При этой симметрии прямая AB перейдет в себя, точка C перейдет в точку C', расположенную от прямой AB на таком же расстоянии, как точка C. Но на прямой CD, кроме точки C, есть не более одной точки, отстоящей от прямой AB на такое же расстояние, как точка C (при удалении от N расстояние увеличивается).

С другой стороны, из условия задачи следует, что точка D отстоит от прямой AB на такое же расстояние, как точка C (эти расстояния — высоты равновеликих треугольников ADB и ACB с общим основанием AB). Значит, при нашей симметрии вершина C переходит в вершину D (другая возможность $C\to C$, $D\to D$ привела бы к тому, что $C=D$). Аналогично вершина A переходит к вершине B и B переходит в A. Следовательно, треугольник DBC переходит в треугольник CAD и, значит, эти треугольники равны.

13. Рассмотрим график функции $y=\sqrt{x}$ на отрезке $[0; n]$. Пусть S — площадь криволинейного треугольника, ограниченного кривой $y=\sqrt{x}$, осью Ox и прямой $x=n$ (рис. 4, *а*).

kvant.mccme.ru

Тогда $S=\int\limits_0^n \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}n\sqrt{n}$.

Пусть $S_n=\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}$. Легко видеть, что S_n — это площадь голубой фигуры на рисунке 4, *б*. Поэтому $S_n>S$.

С другой стороны, площадь розовой фигуры на рисунке 4, *в* равна $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n-1}+\frac{\sqrt{n}}{2}=(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n})-\frac{\sqrt{n}}{2}=S_n-\frac{\sqrt{n}}{2}$ и меньше S. Таким образом, $S_n>S>S_n-\frac{\sqrt{n}}{2}$.

Это и дает требуемое неравенство.

14. Может. Указание. Рассмотрите правильную пирамиду $ABCD$ с очень большим по сравнению с ребром основания ABC боковым ребром и возьмите точки K и L где-нибудь на основании ABC и две другие точки M и N где-то у вершины D. Сумма длин ребер пирамиды $KLMN$ почти в 4/3 раза больше суммы длин ребер пирамиды $ABCD$.

15. $\frac{1-3^{1986}}{2}$. Указание. Рассмотрите многочлен $\frac{P(x)-P(-x)}{2}$, где $P(x)=(x^5+x-1)^{1986}$.

Искомая сумма равна $\frac{P(1)-P(-1)}{2}$.

Калейдоскоп «Кванта»

Головоломки

Цифры на кубике. Условию задачи удовлетворяет только тот случай, при котором суммы цифр на противоположных гранях равны по 11, то есть против цифры 4 находится цифра 7, против цифры 5 — цифра 6, против цифры 8 — цифра 3.

Треугольники и квадрат. См. рисунок 5.

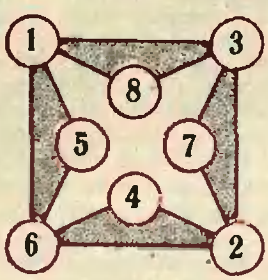


Рис. 5.

Оптические приборы

1. $D=-5$ дптр.
2. $H\leqslant Fl/a=1500$ м $=1{,}5$ км, $v\leqslant l/t=100$ м/с $=360$ км/ч.
3. $b=2$ см.
4. $D_2=kF_2/(Ld_0)=400$ дптр.
5. Труба Галилея: $F_1=\gamma L/(\gamma-1)=45$ см, $F_2=F_1-L=5$ см;
   труба Кеплера: $F_1=\gamma L/(\gamma+1)=36$ см, $F_2=L-F_1=4$ см.

I Всесоюзная олимпиада по физике учащихся средних профессионально-технических училищ

Теоретический тур

I курс

1. $x=\frac{1}{k}\left(mg-T+\frac{T^2}{2mg}\right)$ при $T\geqslant 2mg$,

$x=\frac{T-mg}{k}$ при $T<2mg$.

2. $l_0=\frac{(L-x_1)x_1T_2-(L-x_2)x_2T_1}{x_1T_2-x_2T_1}=70$ см;

при температуре жидкого гелия $x=L-l_0=10$ см.

3. $\Delta T_+=(1-k)m\lambda/(cM)$; $\Delta T_-=km\lambda/(cM)$; при $k=1/2$ $\Delta T_+=\Delta T_-\approx 9$ К.

4. $R_0\geqslant 99R=99$ кОм.

5. $R_{AB}=629R/60\approx 10{,}5R$.

6. $l=\frac{v(T_2^2-4T_1^2)}{2(4T_1-T_2)}=3750$ м $=3{,}75$ км.

Указание. Первый сигнал идет от места взрыва до гидрофона по прямой, без отражений; второй сигнал испытал отражение от поверхности воды; третий сигнал испытал два отражения от поверхности воды и одно отражение от дна водоема.

II и III курсы

1. См. решение задачи Ф993 из «Задачника «Кванта».
2. $T=4\pi\sqrt{L/(5g)}$.
3. $\lambda=c(t_1-t_2)\tau_2/\tau_1=336$ кДж/кг.
4. В первом случае последовательно с прибором нужно включить добавочное сопротивление $R_1=(U/(i_0n))-r\approx 400$ кОм; во втором случае параллельно прибору нужно включить шунт сопротивлением $R_2=ri_0n/(I-i_0n)\approx 0{,}03$ Ом.
5. $\Delta I_{max}=-U/R$; это изменение тока достигается исключением ребра AB.
6. $R\geqslant h/\sqrt{n^2-1}$.

XII Всероссийская олимпиада школьников

Математика

8 класс

1. Центры A_1, B_1, C_1, D_1 данных окружностей являются вершинами четырехугольника, вписанного в окружность того же радиуса с центром O (рис. 6). Следовательно, $\widehat{A_1B_1C_1}+\widehat{A_1D_1C_1}=180°$. Так как соответствующие стороны четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ параллельны, то $\widehat{ABC}+\widehat{ADC}=180°$, и поэтому около $ABCD$ можно описать окружность.

Предостережение: четырехугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ не обязательно подобны!

2. а) Ответ: $2d\cos 36°$.

б) Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник со стороной a, M — точка пересечения диагоналей AD и CE, x — отношение длины диагонали к длине стороны (рис. 7). Из подобия треугольников EMD и AMC получаем:

$$\frac{ED}{EM}=\frac{AC}{MC},\text{ или }\frac{a}{(x-1)a}=\frac{xa}{a}.$$

Следовательно, $x^2-x-1=0$, $x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, или $AC=\frac{(1+\sqrt{5})a}{2}$.

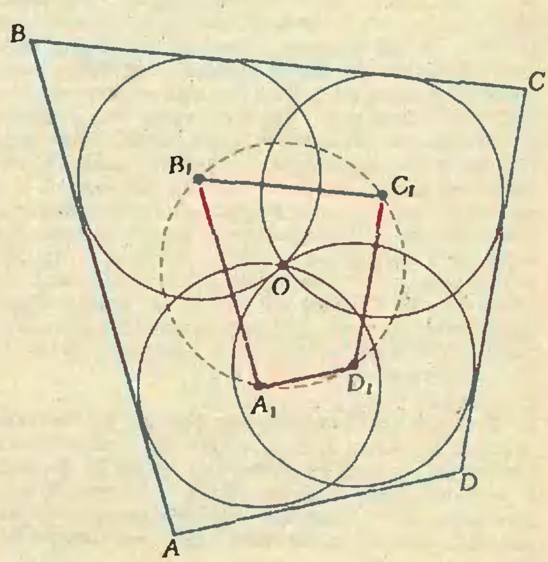


Рис. 6.

kvant.mccme.ru

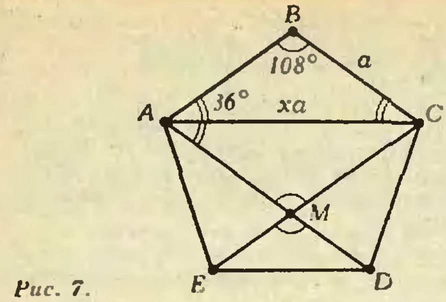


Рис. 7.

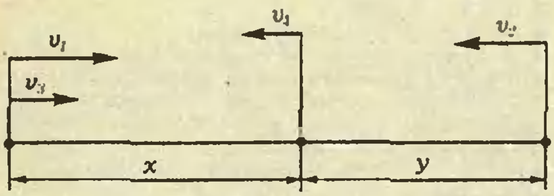


Рис. 8.

3. Если десятичная запись числа N оканчивается на 20, то $N=100M+20$, где M — целое число. Следовательно, N делится на 5 и не делится на 25. Последнее невозможно: если данное число N делится на простое число p, то оно делится и на p^2. Действительно, знаменатель прогрессии q — рациональное число. Представив q в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, получим, что $c=am^2/n^2$, то есть a делится на n^2. Следовательно, $a=kn^2$, $b=knm$, $c=km^2$, где k — целое число. Если $N=k^3(n^3-m^3)^2$ делится на p, то либо k, либо n^3-m^3 делится на p, то есть N делится на p^2.

4. Ответ. В 15 ч 20 мин. Решение. Обозначим через v_1, v_2, v_3, v_4 скорости автомобиля, мотоцикла, мопеда и велосипеда, через x и y — расстояния, отделявшие в 12 часов велосипедиста от автомобилиста и мотоциклиста (рис. 8). Условия задачи приводят к системе уравнений $x=2(v_1+v_4)$, $x+y=4(v_1+v_2)$, $x+y=5(v_2+v_3)$, $y=6(v_2-v_4)$. Пусть велосипедист встретил мопед в t часов. Тогда $x=(t-12)(v_3+v_4)$. Из полученной системы находим, что $x=\frac{10}{3}(v_3+v_4)$. Следовательно, $t=15\frac{1}{3}$.

5. Решение. Из условия следует, что каждая точка стола удалена от центра некоторой монеты на расстояние, меньшее диаметра монеты. Уменьшим все линейные размеры (стола, монет и т. д.) вдвое. Полученный столик можно считать четвертью данного стола. На столике расположены 25 монет вдвое меньшего радиуса (назовем их монетками), причем каждая его точка будет удалена от центра некоторой монетки на расстояние, меньшее радиуса монеты (не монетки!). Если теперь, не меняя положения центров монеток на столике, увеличить их радиусы вдвое (то есть превратить в монеты), то столик будет покрыт 25 монетами. Таким образом, четверть данного стола может быть покрыта 25 монетами, а весь стол, следовательно, — 100 монетами.

9 класс

1. Решение. Занумеруем фишки по часовой стрелке числами 1, 2, 3, ..., 30. Не ограничивая общности, можно считать, что среди 15 фишек с четными номерами не более 7 белых. Тогда среди фишек с нечетными номерами столько же черных. Меняя их местами с белыми фишками, имеющими четные номера, добьемся требуемого расположения не более чем за 7 ходов.

Замечание. Если фишки расположены так, что сначала подряд идут 15 белых фишек, а затем — 15 черных, то менее чем за 7 ходов получить требуемое расположение нельзя.

2. Решение. Предположим противное: $a_3+a_1>a_2\sqrt{3}$, $a_4+a_2>a_3\sqrt{3}$, $a_5+a_3>a_4\sqrt{3}$, $a_6+a_4>a_5\sqrt{3}$, $a_7+a_5>a_6\sqrt{3}$. Так как $a_1=0$, то из первых двух неравенств следует, что $a_4+a_2>a_3\sqrt{3}>3a_2$, или $a_4>2a_2$. Из двух последних неравенств аналогично находим, что $a_4>2a_6$. Следовательно, $a_4>a_2+a_6$. С другой стороны, сложив второе и четвертое неравенства, получим, учитывая третье неравенство, что $a_6+2a_4+a_2>(a_3+a_5)\sqrt{3}>3a_4$, то есть $a_2+a_6>a_4$. Противоречие.

Замечание. Семерка чисел 0, 1, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{3}$, 1, 0 удовлетворяет условию задачи; для нее при каждом $i=2, 3, 4, 5, 6$ выполняется равенство $a_{i+1}+a_{i-1}=a_i\sqrt{3}$.

3. Указание. Треугольник ABC получается из $\triangle A_1B_1C_1$ поворотом вокруг точки M на некоторый угол α. Пусть K — середина отрезка BC, L — середина AC, K_1 — середина отрезка B_1C_1, L_1 — середина A_1C_1. Точка K_1 получается из K тем же поворотом. Рассмотрим отрезок DM. Этот отрезок является биссектрисой угла KMK_1, причем длина его равна $MK/\cos(\alpha/2)$. Аналогично рассуждаем про точку E. Итак, точки D и E получаются из точек K и L произведением поворота на угол $\alpha/2$ и гомотетии с центром в точке M и коэффициентом $1/\cos(\alpha/2)$. Поэтому угол DME — прямой и, следовательно, точка M лежит на окружности с диаметром DE. Точки C и C_1 также принадлежат этой окружности.

4. Исследование. Пусть S — середина AC. Тогда PQS — равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой PQ. Это очевидно, если $B=90°$. Пусть, для определенности, $B<90°$ и пусть D и E — середины сторон AB и BC соответственно (рис. 9). Тогда треугольники PDS и SEQ равны по двум сторонам ($PD=SE$ и $DS=EQ$) и углу между ними ($\widehat{PDS}=\widehat{SEQ}$). Следовательно, $PS=QS$ и $\widehat{PSD}=\widehat{SQE}$. Стороны DS и EQ равных углов PSD и SQE взаимно перпендикулярны, эти углы отложены от прямых DS и EQ в одном и том же направлении (на рисунке 9 — по часовой стрелке), поэтому стороны PS и SQ также взаимно перпендикулярны.

Построение. На серединном перпендикуляре к отрезку PQ от середины T отрезка откладываем отрезок $ST=\frac{1}{2}PQ$ так, чтобы точки S и R находились по одну сторону от прямой PQ. На прямой RS строим точки A и C такие, что $AR=2RS$, $CS=AS$. Точку B находим из

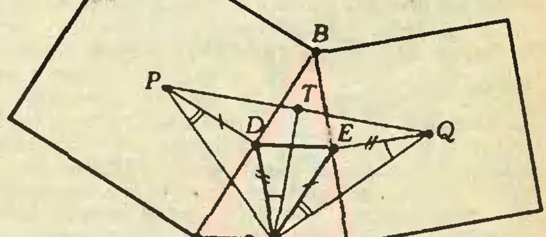


Рис. 9.

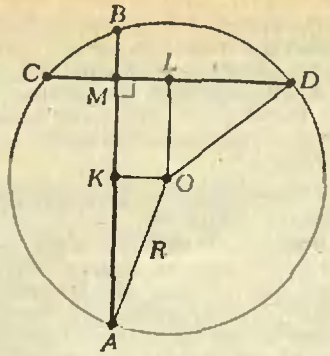


Рис. 10.

условия, что $\triangle APB$ — равнобедренный прямоугольный с гипотенузой AB.

5. Предположим противное: числа $1, 2, \ldots, 3n$ разделены на три такие группы A, B, C, что указанный выбор невозможен. Пусть a, b, c — наименьшие элементы в группах, причем $a<b<c$. Тогда $a=1$, $b\geqslant 2$. Если $b=2$, то $c\neq 3$ и, следовательно, $c\geqslant 4$. Если $b>2$, то $c\geqslant b+1\geqslant 4$, то есть в любом случае $c\geqslant 4$. Обозначим через s наименьшую (по абсолютной величине) разность между соседними членами последовательности, образованной из чисел группы C, расположенных в порядке возрастания. Рассмотрим три случая.

а) $s\geqslant 3$. Тогда из чисел $3k-2$, $3k-1$, $3k$, где $k=1, 2, \ldots, n$, не более чем одно входит в C, причем из чисел 1, 2, 3 ни одно не входит в C. Следовательно, в C содержится не более $n-1$ чисел. Противоречие.

б) $s=2$. Пусть c' — произвольное число из C. Тогда $c'-1\notin C$. Так как $1\in A$ и $(c'-1)+1=c'$, то $c'-1\notin B$. Следовательно, $c'-1\in A$, то есть в A содержится n чисел вида $c'-1$, где $c'\in C$. Так как $1\in A$, а $c'-1\geqslant 3$ для любого $c'\in C$, то в A содержится не менее $n+1$ чисел. Противоречие.

в) $s=1$. Выберем среди чисел c, принадлежащих C и таких, что $c+1$ также принадлежит C, наименьшее число $\bar{c}$. Рассмотрим (натуральные!) числа $\bar{c}-b$ и $\bar{c}-b+1$ и докажем, что они оба принадлежат C (тем самым будет получено противоречие с выбором c). Очевидно, что $b-1\in A$. Так как $(\bar{c}-b+1)+(b-1)=\bar{c}$, то $\bar{c}-b+1\notin B$. Так как $(\bar{c}-b+1)+b=\bar{c}+1$, где $\bar{c}+1\in C$ в силу выбора $\bar{c}$, то $\bar{c}-b+1\notin A$. Следовательно, $\bar{c}-b+1\in C$. Аналогично доказывается, что $\bar{c}-b\in C$.

10 класс

1. Решение. Пусть O — центр круга, R — его радиус, AB и CD — взаимно перпендикулярные хорды, K и L — середины AB и CD (рис. 10). Если $M=O$, то утверждение очевидно. Если $M\neq O$, то $AB^2+CD^2=4(AK^2+LD^2)=4((R^2-OK^2)+(R^2-OL^2))=8R^2-4OM^2$.

2. Указание. Не ограничивая общности, можем считать, что $0<b<a$. Обозначим $x=\frac{a}{b}$. Тогда данные неравенства равносильны неравенствам $2\frac{x-1}{x+1}<\ln x<\frac{x-1}{\sqrt{x}}$. Оба эти неравенства доказываются аналогично. Для доказательства левого неравенства достаточно проверить, что функция $f(x)=\ln x-2\frac{x-1}{x+1}$ строго возрастает при $x>1$. Проверку можно провести, например, с помощью производной.

3. Ответ. $V=\frac{1}{3}abc$. Решение. Пусть h — высота параллелепипеда, проведенная из вершины B_1 к основанию $ABCD$. Возьмем на продолжении отрезка DB за точку B точку O так, чтобы $OB=BD$ (рис. 11). Тогда OB_1D_1B — параллелограмм, и поэтому $OB_1\parallel BD_1$, $OB_1=c$. Следовательно, $V_{B_1AOC}=\frac{1}{3}OB_1\cdot\left(\frac{1}{2}AB_1\cdot CB_1\right)=\frac{1}{6}abc$. Так как $S_{AOC}=\frac{3}{2}S_{ABCD}$, то $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}=h\cdot S_{ABCD}=2\cdot\left(\frac{1}{3}h\cdot S_{AOC}\right)=2V_{B_1AOC}=\frac{1}{3}abc$.

4. Указание. Пользуясь тождеством $x^2+(x+3)^2+(x+5)^2+(x+6)^2=(x+1)^2+(x+2)^2+(x+4)^2+(x+7)^2$ и полагая $x=1+8k$, где $k=0, 1, 2, \ldots, 124$, находим нужные 125 четверок гирь для каждой из групп.

5. а) Возьмем отрезок AB длины 2 с разноцветными концами. Такой отрезок существует: в противном случае все точки окружности α радиуса 2 с центром в произвольной точке O были бы окрашены в тот же цвет, что и точка O, и рассматривая всевозможные окружности β радиуса 2 с центрами на окружности α, получили бы круг радиуса 4 с центром O, все точки которого одного цвета, что невозможно. Пусть цвет точки C — середины AB — совпадает с цветом точки A. Построим правильные треугольники ACD и ACE, как на рисунке 12. По условию точки D и E окрашены в тот же цвет, что и точка B, и BDE — искомый треугольник.

б) Разобьем плоскость на горизонтальные полосы ширины $\sqrt{3}/2$, включающие свои нижние границы, но не включающие верхние. Раскра-

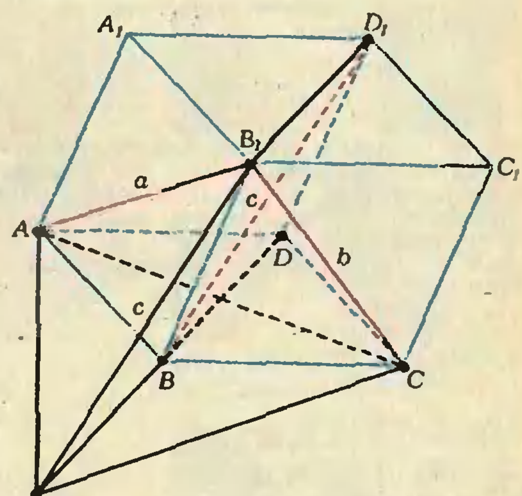


Рис. 11.

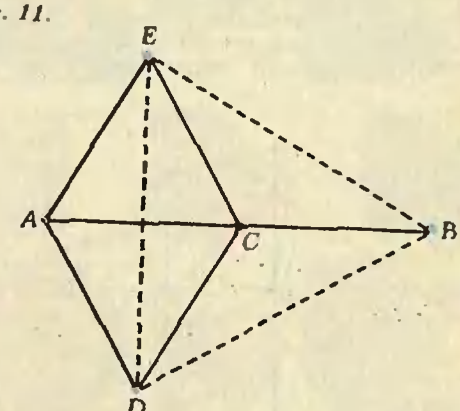


Рис. 12.

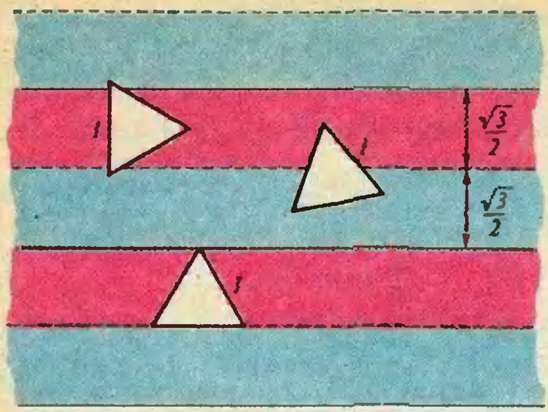


Рис. 13.

сим полосы поочередно в два цвета, как на рисунке 13. Указанная раскраска удовлетворяет, очевидно, условию задачи.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. $\Delta h = F/(\rho_в gS) = 0{,}1$ м $= 10$ см, где $\rho_в = 10^3$ кг/м^3 — плотность воды.
2. Поскольку доска не скользит, время движения кубика

$$t = \sqrt{2l/(g \sin \alpha)} \approx 0{,}6 \text{ c}.$$

3. $r' = 45$ Ом или $r'' = 5$ Ом.
4. $t = (v_0 + v_к)/g \approx 1{,}9$ с.

9 класс

1. Допустимо падение напряжения на 20 %.
2. Время движения

$$t = \Delta l \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{v_i},$$

где Δl — длина каждого i-го участка пути, на котором скорость реки v_i можно считать постоянной, n — число таких участков (чем больше n, тем точнее можно определить t).
3. $N_{ср} = mg\Delta v/2 = 4{,}9$ Вт.
4. $A = \varepsilon_0 SdE^2/4$, где ε_0 — диэлектрическая постоянная.

10 класс

1. $I = \dfrac{CU(n_1+n_2)}{n_1\tau_2 + n_2\tau_1} \approx 0{,}6$ мкА.
2. $v_{0\,\min} = \sqrt{\dfrac{lg}{(1+m/M)\sin 2\alpha}}$,
$\alpha_0 = \operatorname{arctg}\sqrt{1+m/M}$.
3. $t = \tau/3$.
4. Построение ясно из рисунка 14. Соединим точки B и F и проведем окружность с диаметром BF. Продолжим луч AB и будем вращать линейку с делениями вокруг точки F до тех пор, пока отрезок FK (точка K лежит на луче BC) не станет равным отрезку EG (точка G принадлежит окружности). Восставим перпендикуляр FO (точка O лежит на окружности) к прямой FE. Точка O — оптический центр линзы, FO — отрезок, принадлежащий ее главной оптической оси.

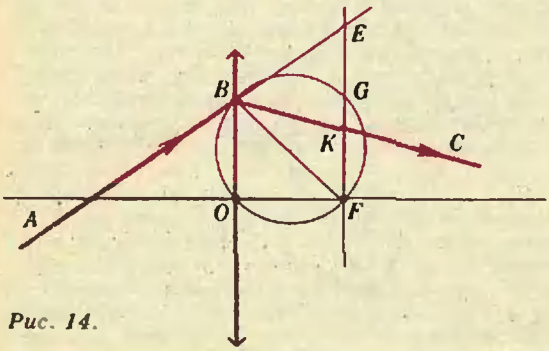


Рис. 14.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 9)

1. Из первого и третьего рисунков условия задачи следует, что три кочана капусты уравновесят две дыни и две свеклы. Если добавить на каждую чашку весов еще по две свеклы, то равновесие не нарушится. Но три кочана капусты и три свеклы, согласно второму рисунку, весят столько же, сколько весят три дыни. Поэтому три дыни весят столько же, сколько две дыни и пять свекол. Значит, дыня в пять раз тяжелее свеклы.
2. Из условия задачи следует, что первая цифра неизвестного множителя — 8 или 9, а вторая — 1 или 6. Перебрав все четыре возможных варианта: 81, 91, 86 и 96, получаем, что цифра 2 стоит в третьем разряде произведения только в случае множителя 81.
3. Электрическая лампочка нагревает окружающий ее воздух, возникает конвективный поток вверх, содержащиеся в воздухе пылинки прилипают к потолку после удара об него, образуя пятно над лампой.
4. 8 монет, например, $1+2+2+5+10+10+20+50$ или $1+2+3+5+10+20+20+50$.
5. Пар невидим. Мы видим не клубы пара, а клубы тумана, образующегося, когда горячий воздух перестает обтекать чайник.

Калейдоскоп «Кванта»
(*см. «Квант» № 9*)

Вопросы и задачи

1. Ускорения направлены одинаково (на север).
2. См. рис. 15. Пути, проходимые за последовательные равные промежутки времени, численно равны заштрихованным разным цветом площадям и относятся как 1:3:5:7...
3. См. рис. 16.
4. Ускорение тела, например, массы M равно

$$a = g - F/M,$$

где F — сила сопротивления. Следовательно, скорее упадет тело с большей массой.

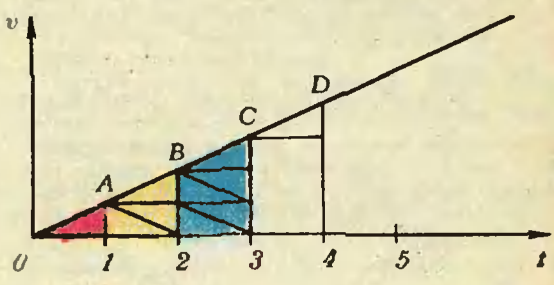


Рис. 15.

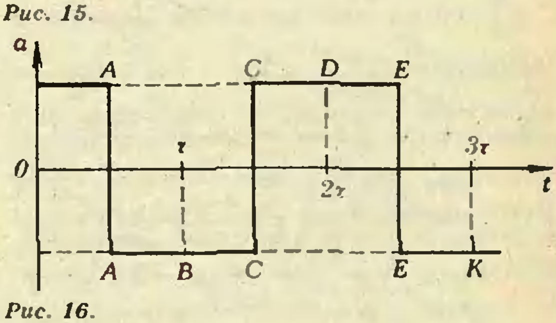


Рис. 16.

kvant.mccme.ru

kvant.mccme.ru

5. Величина ускорения книги относительно лифта зависит не от направления скорости лифта, а от направления его ускорения. Если оно направлено вверх, то ускорение книги равно $g+a$; если вниз, то $g-a$.
6. Ускорение растет из-за уменьшения массы ракеты.
7. Центростремительное ускорение, связанное с обращением Земли вокруг Солнца, чрезвычайно мало по сравнению с ускорением силы тяжести на Земле.
8. В принципе — да, поскольку все тела, в том числе человек, на экваторе легче из-за центростремительного ускорения, обусловленного вращением Земли.
9. Минимальное центростремительное ускорение в этой точке равно ускорению свободного падения g.
10. $T=2\pi\sqrt{R/g}$, где R — радиус Земли; $T\approx 1$ ч 24 мин.
11. При движении с ускорением (взлете) — уменьшается, при движении по орбите маятник не совершает колебаний.

Микроопыт

Гирька, подвешенная к потолку вагона с помощью нити, при равноускоренном движении

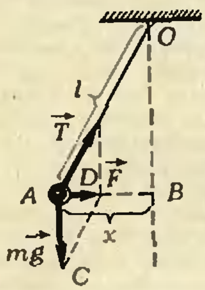


Рис. 17.

отклонится (рис. 17). Из подобия треугольников AOB и ACD находим:

$$a=g\frac{x}{\sqrt{l^2-x^2}}.$$

Наша обложка
(см. «Квант» № 9, 4-я с. обл.)
См. рис. 18.

VIII Турнир юных физиков
(см. «Квант» № 8)

2. При плохом контакте образуется окисная пленка, которая может иметь большое активное сопротивление. Окисная пленка чрезвычайно тонка, и в месте плохого контакта образуется значительная электрическая емкость. Первая программа передается в области низких частот (до 10 кГц), а третья — в частотном диапазоне около 150 кГц. На высоких частотах сказывается наличие емкости: ее сопротивление на высоких частотах может стать гораздо меньше активного сопротивления окисной пленки, и третья программа будет хорошо слышна.
3. До температуры примерно 36 °С термометр нагревается просто теплым выдыхаемым воздухом. Кроме того, натуральная шерсть способствует энергичной конденсации водяного пара, содержащегося в большом количестве в выдыхаемом воздухе, при этом дополнительно выделяется теплота конденсации. Взвешивание 1 г натуральной шерсти на аналитических весах после того, как через нее было сделано 10 медленных выдохов, показало, что ее масса увеличилась на 20 мг. Таким образом, при одном выдохе конденсируется примерно 2 мг воды и выделяется количество теплоты 4,5 Дж. Этого тепла достаточно, чтобы нагреть 1 г ртути и 1 г стекла (примерные массы стекла и ртути, на-

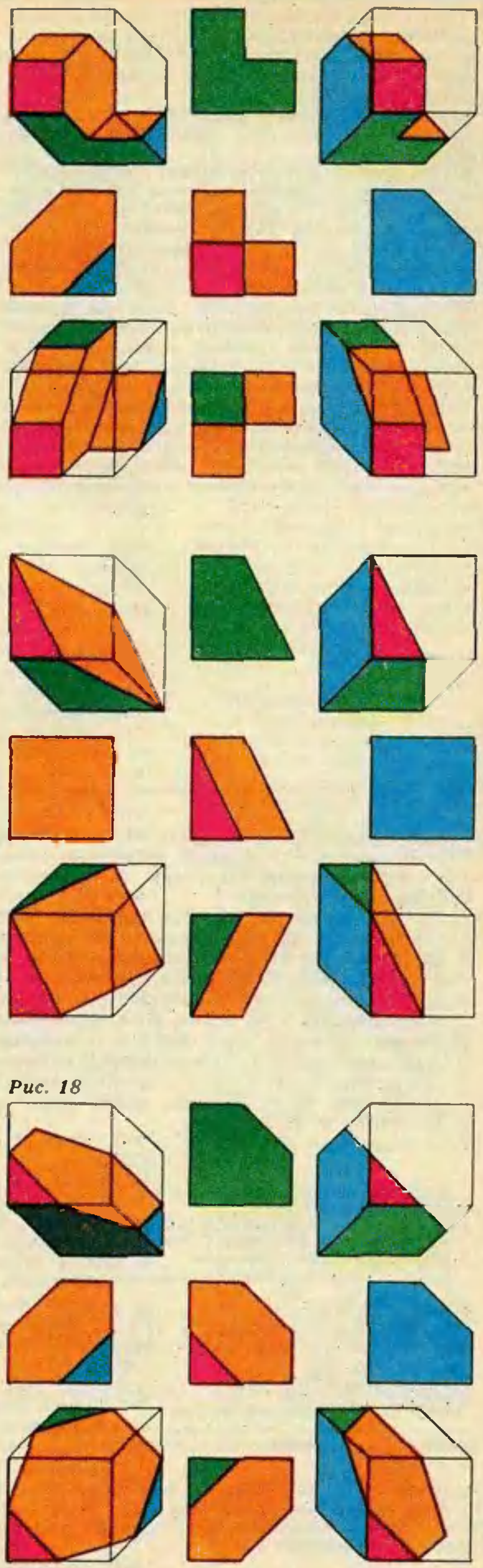


Рис. 18

kvant.mccme.ru

греваемые при измерениях температуры медицинским термометром) на 4 °С. Ясно, что на нагрев термометра уходит лишь часть теплоты, но и этого достаточно, чтобы термометр показал завышенную температуру.

4. Искривление траектории полета «крученого» мяча объясняется его вращением (эффект Магнуса).

5. При игре на гитаре музыкант кратковременно воздействует на струну, тогда как при игре на скрипке смычок взаимодействует со струной почти непрерывно. Так как усилия, оказываемые на струны гитары и скрипки, примерно равны, то вклад энергии при игре на гитаре значительно меньше, чем при игре на скрипке.

6. Совершенно неправильно было бы искать причину опрокидывания бумажной мишени в световом давлении. Световой пучок энергией в несколько Дж и длительностью порядка 0,01 мкс не может сообщить мишени достаточный для опрокидывания механический импульс. Опыт показывает, что в результате местного нагрева вещество взрывоподобно испаряется, что и создает реактивную тягу. Это — главная причина опрокидывания мишени.

7. В водяном молотке находится вода и водяной пар, а воздуха практически нет. При комнатной температуре (20 °С) давление насыщенных паров воды составляет 0,02 % от нормального атмосферного давления. При встряхивании пробирки в воде образуются пустоты, затем вода падает, практически не испытывая сопротивления, и пустоты «схлопываются». Соударения происходят жестко, как между твердыми телами, и поэтому слышен характерный «металлический» звук.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 7)

Задание 13 (Л. Куббель, 1937 г.). **1...Се6! 2. Kf1! Лd5! 3. Kd2 Лff5! 4. Kpe2 Фf6! 5. Kpe3 Kpe5 6. Kc4×.**

Задание 14 (Дж. Бэбиз, 1978 г.). Задача имеет 2 решения: **а) 1...Kpb7 2. a8Ф+ Kpc7 3. Фg8 Kf6 4. Ф:g3 Kpd6 5. Ф:f3 Kpe5 6. Ф:h3 Kpe4 7. Ф:h1 Kpf3 8. Ф:g2×; б) 1...Kpb7 2. a8Ф+ Kpb6. 3. Фa2 Ke1 4. Ф:g2 Kpb5 5. Kpf1 Kpc4 6. Kp:e1 Kpd3 7. Kpd1 Фd4 8. Фc2×.**

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян
Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров
Заместители главного редактора: А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев
Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, А. А. Варламов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант
Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлева

Номер подготовили:
А. А. Варламов, А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили
Ю. А. Ващенко, М. В. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, В. Б. Юдин

Фото представили.
В. В. Дгебуадзе, В. М. Лукин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Д. Храпко

103006 Москва К-6,
ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 15.08.86. Подписано к печати 17.09.86
Т-19576 Бумага 70×108/16
Печать офсетная. Усл. кр. от. 23,8
Усл. печ. л. 6,97 Уч.-изд. л. 5,6
Тираж 196 490 экз.
Цена 40 коп. Заказ 2236

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

kvant.mccme.ru

Консультирует экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

КОМПЬЮТЕРНЫЙ КЛУБ

В своем самом первом интервью для газеты «Советский спорт» 11-летний Гарри Каспаров сказал: «В школе мне больше всего нравятся уроки математики. Я выступал на республиканской олимпиаде и занял третье место».

Через четыре года в журнале «Юность» были опубликованы такие слова будущего чемпиона мира: «Уж если не шахматами, то занялся бы математикой. Только два варианта». Когда ведущему «страничку» спустя еще несколько лет удалось самому взять интервью у Каспарова («Квант», 1981, № 5), он уже был гроссмейстером и признался в беседе, что сейчас шахматы вытеснили все остальное.

Однако прошло несколько лет, и Гарри Каспаров нашел возможность если и не самому вернуться к точным наукам, то способствовать математическому, компьютерному образованию школьников. Через полгода после завоевания короны он стал президентом... первого детского компьютерного клуба в Москве «Наш Арбат».

На торжественном открытии клуба вице-президент АН СССР академик Е. П. Велихов, стоя на пороге клуба вместе с Г. К. Каспаровым, предоставил право перерезать ленточку семилетнему, Боре Степанову. Дети, не смущаясь ни юпитерами программы «Время», ни присутствием иностранных гостей, демонстрировали свое умение работать на ЭВМ. А Каспаров тем временем отвечал на вопросы журналистов.

— Гарри, шахматным автоматам вы не раз давали сеансы одновременной игры. А знакомы ли вы с нешахматными компьютерами?

— Да, и неплохо. Уже три года общаюсь с разными персональными компьютерами.

— Не кажется ли вам, что происходит некоторая переоценка роли компьютера в жизни общества?

— Иногда проявляется такая тенденция — слишком надеяться на ЭВМ. Порой это может быть даже немного опасно, нерасчетливо. Но дело в том, что пока мы не достигли того практического уровня компьютеризации, когда об этом нужно беспокоиться. Поэтому я считаю, что опасения преждевременны. Скажу другое: сегодня овладеть компьютером жизненно важно — особенно для детей. Причем делать это надо сейчас, немедленно — жизнь стремительно идет вперед, и завтра уже может быть поздно. Освоится ребенок с ЭВМ — это будет для него огромный шаг вперед.

— Как для человека?

— Как для человека — это первое. И как для будущего специалиста — это второе, причем необходимое.

— Почему именно Каспаров взял на себя компьютерную нагрузку? — спросил корреспондент академика Е. П. Велихова.

— Каспаров как-то позвонил мне и предложил создать подобный клуб. Так что он — один из главных инициаторов. Ну а я очень рад, что он стал во главе клуба — Гарри Кимович как представитель одного из самых молодежных видов спорта — и самого интеллектуального! — сумеет вести дело на высоком уровне.

Учитывая тему сегодняшней «странички», напомним, что в этом году состоится пятый чемпионат мира среди больших ЭВМ. Одна из партий последней чемпионки мира, программы «Крэйблитц», опубликована в «Кванте» № 4 за 1984 г. Приведем по одному примеру игры двух других призеров — программ «Биби» и «Эвит».

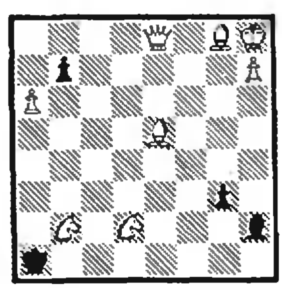
«Биби» — «Нучесс». Русская партия. **1.e4 e5 2.Kf3 Kf6 3.d4 K:e4 4.Cd3 d5 5.K:e5 Cd6 6.0—0 0—0 7. C:e4 de 8.Kc3 Фe7 9. Фh5.** Тонкий ход. Прежде чем произвести пешечный размен в центре, полезно вызывать ослабление черных полей (это и решит исход игры). **9...g6 10.Фe2 C:e5 11.de Ф:e5 12.Ф:e4 Ф:e4 13.K:4 Cf5 14.Лe1 Kpg7 15.Cf4 Ka6 16.Ce5+ Kph6 17.Лe2 Лae8 18.Kf6 Лe6 19.g4!** Заключительная атака по черным полям. **19...C:c2 20.g5+! Kpg7** (**20...Kp:g5 21. f4+** и **22.Л:c2** с лишней фигурой) **21.Kd7+ Л:e5 22. K:e5 Cf5 23.Лae1**, и белые вскоре выиграли.

«Эвит» — «Пэцок». Английское начало. **1.c4 e5 2.Kc3 Kf6 3.g3 Cb4 4.Cg2 0—0 5.Kh3 Kc6 6.b3 d6 7.0—0 Cc5 8.Cb2 Cg4 9.Ka4 Kd4 10.Лe1 h6 11.K:c5 dc 12.f4 C:h3 13.C:h3 ef 14.gf Ke4 15.e3 Ke6 16.d3 Kf6 17.Cg2 c6 18.a3 Фe7 19. Фd2 Kh5 20.f5 Kg5 21.b4 Лae8 22. Лad1 a6 23.d4 Ke4 24.Фe2 Фg5 25. dc Ф:f5 26.a4 Фg5 25.dc Ф:f5 26.a4 Фg5 27.Лd7 a5 28.Л:b7 ab 29.a5 Ф:c5 30.a6 Kd6 31. Cd4.** Напряженное сражение протекало при некоторой инициативе белых, владеющих преимуществом двух слонов. Сейчас черные идут на разменную комбинацию, ошибочность которой видна, что называется, невооруженным взглядом. **31...Ф:d4 32.ed Л:e2 33.Л:e2 K:b7 34.ab c5 35.dc Лd8 36.Лe1 Kf4 37.c6**, и белые пешки неудержимы.

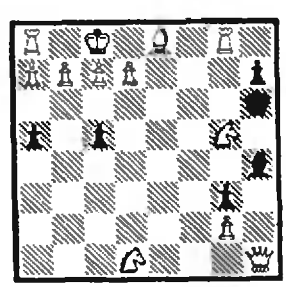
Эти партии подтверждают старую истину: в тактической борьбе, построенной на расчете вариантов, компьютер действует вполне достойно, а в позиционной игре, где работают общие принципы, он пока «плавает».

Конкурсные задания

В сегодняшних заданиях требуется поставить обратный мат: белые начинают и вынуждают черных объявить мат в заданное число ходов (в отличие от кооперативного мата, черные к этому не стремятся).



19. Обратный мат в 4 хода.



20. Обратный мат в 6 ходов.

Срок отправки решений — 20 декабря 1986 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 19, 20».

kvant.mccme.ru

Цена 40 коп.

Индекс 70465

На этой картинке показаны 12 одинаковых шаров (голубого цвета), приложенных к еще одному такому же шару (красному). Существование такого расположения становится совсем очевидным, если поместить шары в ячейки кубической решетки. Подробности читайте в заметке В. В. Произволова «Тринадцать шаров в одной клетке».

Эту конфигурацию шаров можно себе представить иначе. Один красный шар и шесть синих можно положить на плоскость так, чтобы все синие шары касались красного; затем можно сверху положить еще три синих шара в три из образовавшихся шести лунок вокруг красного шара; наконец, можно представить себе еще три шара, приклеенных таким же образом снизу. Повернув эту конструкцию (как?), мы получим показанное здесь расположение шаров.